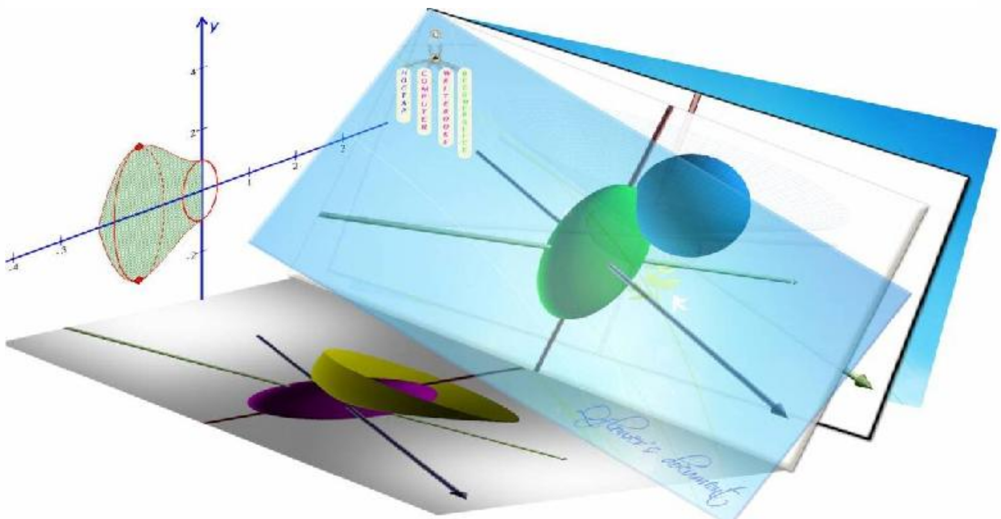
TRUNG TÂM GIA SƯ ĐỈNH CAO CHẤT LƯỢNG
SĐT: 0978421673-TP HUẾ

CHUYÊN ĐỀ HÀM SỐ 12

LUYỆN THI

TỐT NGHIỆP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG, ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG



* Biện luận số nghiệm phương trình
* Phương trình tiếp tuyến
* Tương giao, tiếp xúc và họ đương cong
* Điểm đặc biệt, khoảng cách, tâm-trục đối xứng

Huế, tháng 7/2012

MỤC LỤC

- **Dạng 3:** Tìm cặp điểm trên đồ thị (C):y=f(x) đối xứng qua điểm I(a;b)

Vấn đề 6: Họ đường cong

- **Dạng 1:** Tìm điểm cố định của họ đường cong
- **Dạng 2:**Tìm điểm họ đồ thị không đi qua
- **Dạng 3:** Tìm điêmt mà một số đồ thị của họ đồ thị đi qua

Vấn đề 7: Tâm đối xứng -Trục đối xứng

Vấn đề 8: Khoảng cách

- **Dạng 1:** Đối với hàm phân thức hữu tỉ
- **Dạng 2:** Cho đồ thị (C) có phương trình y=f(x). Tìm trên (C) điểm M thỏa điều kiện K
- **Dạng 3:** Cho đường cong (C) và đường thẳng d : Ax+By+C=0 . Tìm điểm I trên (C) sao cho khoảng cách từ I đến d là ngắn nhất .
- **Dạng 4:** Cho đường cong (C) có phương trình y=f(x) và đường thẳng d : y=kx+m. Tìm m để d cắt (C) tại hai điểm A,B sao cho :
  - AB là hằng số a
  - AB ngắn nhất .

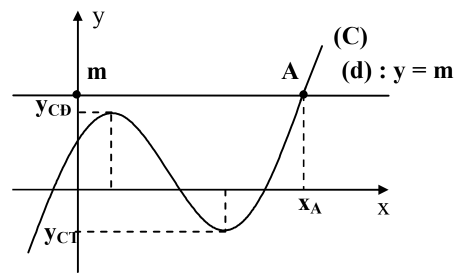
Luyện tập

Vấn đề 1: Dựa vào đồ thị biện luận theo m số nghiệm của phương trình

Dạng 1: $F(x,m) = 0 \Leftrightarrow f(x) = m \quad (1)$

Khi đó (1) có thể xem là phương trình hoành độ giao điểm của hai đường:

$$(C): y = f(x); \quad d: y = m$$

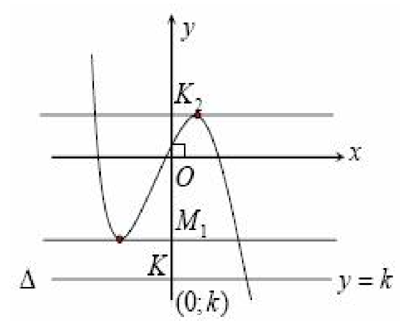


- d là đường thẳng cùng phương với trục hoành.
- Dựa vào đồ thị (C) ta biện luận số giao điểm của (C) và d. Từ đó suy ra số nghiệm của (1)

Dạng 2: $F(x,m) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(m)$

Thực hiện tương tự như trên, có thể đặt $g(x) = k$.

Biện luận theo k, sau đó biện luận theo m.



BÀI TẬP MẪU:

Bài 1. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 3$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

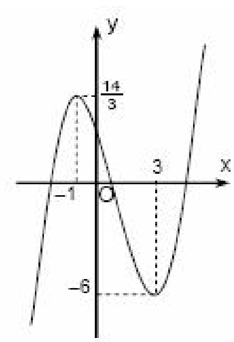
b) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + m = 0$

Hướng dẫn:

a) Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	
y	$-\infty$	↗	$\frac{14}{3}$	↘	-6	↗	$+\infty$

Đồ thị:



b) $\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + m = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 3 = -m + 3$

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng $y = -m + 3$

- $m > 9$ hoặc $m < \frac{5}{3}$: phương trình có 1 nghiệm
- m=9 hoặc $m = \frac{5}{3}$: phương trình có 2 nghiệm
- $\frac{5}{3} < m < 9$: phương trình có 3 nghiệm

Bài 2. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{1-x}$ có đồ thị (C)

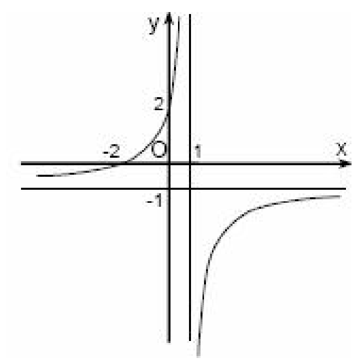
a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

b) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $m|x-1| = x+2$

Hướng dẫn:

a) Bảng biến thiên và đồ thị:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+	‖	+
y	$-1 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow -1$



b)

$x = 1$ không là nghiệm của phương trình $m|x-1| = x+2$ (*)

Ta có: $(*) \Leftrightarrow m = \frac{x+2}{|x-1|}$

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{|x-1|}$ với đường thẳng $y = m$.

Hàm số $y = \frac{x+2}{|x-1|} = \begin{cases} \frac{x+2}{x-1} & \text{khi } x \geq 1 \\ \frac{x+2}{1-x} & \text{khi } x < 1 \end{cases} = \begin{cases} -f(x) & \text{khi } x \geq 1 \\ f(x) & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

Đồ thị hàm số này gồm

- Giữ lại phần đồ thị ở câu a) ứng với hoành độ $x < 1$.

☛ Lấy đối xứng qua Ox phần đồ thị ở câu a) ứng với hoành độ $x \geq 1$

Từ đồ thị suy ra:

① $m \leq -1$

⇒ đường thẳng không cắt đồ thị

⇒ PT vô nghiệm.

② $-1 \leq m \leq 1$

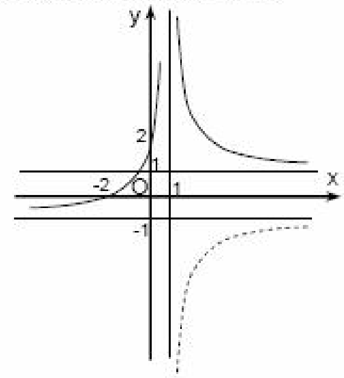
⇒ đường thẳng cắt đồ thị tại 1 điểm

⇒ PT có 1 nghiệm

③ $m > 1$

⇒ đường thẳng cắt đồ thị tại 2 điểm

⇒ PT có 2 nghiệm phân biệt.

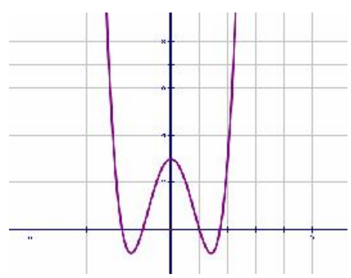


Bài 3. Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$

1.Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị

2.Tìm a để phương trình : $x^4 - 4x^2 + |\log_3 a| + 3 = 0$ có 4 nghiệm thực phân biệt .

x	∞		$\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	↘	CT -1	↗	3 CĐ	↘	CT -1	↗	$+\infty$



Hướng dẫn:

Phương trình tương đương với $x^4 - 4x^2 + 3 = -|\log_3 a|$

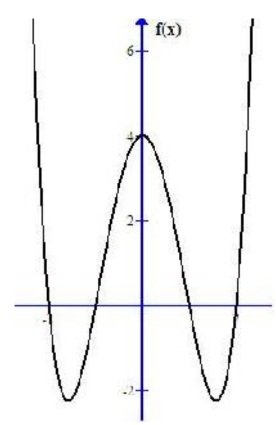
Theo đồ thị câu 1 bài toán yêu cầu tương đương $-1 < -|\log_3 a| < 3$

$\Leftrightarrow |\log_3 a| < 1 \Leftrightarrow -1 < \log_3 a < 1 \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{3} < a < 3}$

Bài 4. Cho hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 4$, có đồ thị (C)

1. Khảo sát và vẽ đồ thị (C).

2. Tìm m để phương trình $|x^4 - 5x^2 + 4| = \log_2 m$ có 6 nghiệm phân biệt.



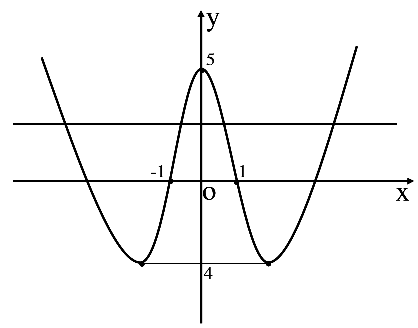
Hướng dẫn :

$\log_{12} m = \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow m = 12^{\frac{9}{4}} = 144\sqrt[4]{12}$

Bài 5. Cho hàm số: $y = x^4 - 6x^2 + 5$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của
2. Tìm m để phương trình: $x^4 - 6x^2 - \log_2 m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt trong đó 3 nghiệm lớn hơn -1.

Hướng dẫn :



Pt $\Leftrightarrow$ $x^4 - 6x^2 + 5 = 5 + \log_2 m$

Nhìn vào đồ thị ta thấy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$

$0 < 5 + \log_2 m < 5 \Leftrightarrow \dfrac{1}{32} < m < 1$

BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Bài 1. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$ có đồ thị (C)

1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số
2. Dựa vào đồ thị (C), biện luận theo m số nghiệm thực của phương trình $x^4 - 2x^2 - m = 0$ (*)

Bài 2. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2$

1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C)
2. Dùng (C) tìm k để phương trình : $-x^3 + 3x^2 + k^3 - 3k^2 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Bài 3. Cho hàm số $y = x^3 - mx + m - 2$, với m là tham số

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi m =3.
2. Dựa vào đồ thị (C) biện luận theo k số nghiệm của $x^3 - 3x - k + 1 = 0$

Bài 4 . Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$

1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C)
2. Dựa vào đồ thị (C), biện luận theo m số nghiệm của phương trình sau: $x^3 + 3x^2 + 1 = \dfrac{m}{2}$

Bài 5 . Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 3\ (C)$

1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C)
2. Tìm m để phương trình $x^4 - 2x^2 + m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt

BÀI TẬP TỰ LUYỆN:

Bài 1 . Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1\ (C)$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C)

b. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình:

❖ $x^3 - 3x - m = 0$

❖ $\left|x^3 - 3x + 1\right| = 2m$

Bài 2.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số sau: $y = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 3$

b) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $\frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + m = 0$

c) Tìm k để phương trình $\left|x^4 - 4x^2 + 6\right| = 2k$ có 6 nghiệm phân biệt

Bài 3.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số sau: $y = \dfrac{2x-4}{x-3}$

b) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình

❖ $2\left|x-2\right| - m\left|x-3\right| = 0$

❖ $x - 2 = m\left|x-3\right|$

Bài 4. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số. Dùng đồ thị (C) biện luận theo m số nghiệm của phương trình:

a) $y = x^3 - 3x + 1;\ x^3 - 3x + 1 - m = 0$

b) $y = -x^3 + 3x - 1;\ x^3 - 3x + m + 1 = 0$

c) $y = x^3 - 3x + 1;\ x^3 - 3x - m^2 - 2m - 2 = 0$

d) $y = -x^3 + 3x - 1;\ x^3 - 3x + m + 4 = 0$

e) $y = -\dfrac{x^4}{2} + 2x^2 + 2;\ x^4 - 4x^2 - 4 + 2m = 0$

f) $y = x^4 - 2x^2 + 2;\ x^4 - 2x^2 - m + 2 = 0$

Bài 5. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số. Từ đồ thị (C) hãy suy ra đồ thị (T). Dùng đồ thị (T) biện luận theo m số nghiệm của phương trình:

1. $(C): y = x^3 - 3x^2 + 6;\qquad (T): y = \left|x^3 - 3x^2 + 6\right|;\ \left|x^3 - 3x^2 + 6\right| - m + 3 = 0$

2. $(C): y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4;\ (T): y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4;$

   $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| + m = 0$

3. $(C): y = (x+1)^2(2-x);\ (T): y = (x+1)^2|2-x|; (x+1)^2|2-x| = (m+1)^2(2-m)$

Bài 6. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $x - 3y = 0$.

c) Dùng đồ thị (C), biện luận số nghiệm của $3x^2 - (m+2)x + m + 2 = 0$

Bài 7. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) c ủa hàm số.

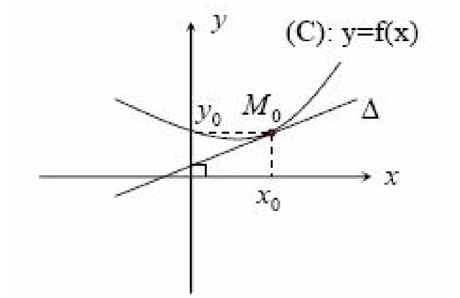
b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $x - 2y = 0$.

c) Dùng đồ thị (C), biện luận theo m số nghiệm của $2x^2 - (m+1)x + m + 1 = 0$

Vấn đề 2 : Tiếp tuyến của đồ thị hàm số

DẠNG 1: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN TẠI ĐIỂM M($x_0;y_0$)

Phương pháp: *Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C): y =f(x) tại điểm* $M_0\left(x_0;y_0\right)$:



- *Nếu cho* x_0 *thì tìm* $y_0 = f(x_0)$.
- *Nếu cho* y_0 *thì tìm* x_0 *là nghiệm của phương trình* $f(x) = y_0$.
- *Tính* $y' = f'(x)$. *Suy ra* $y'(x_0) = f'(x_0)$.
- *Phương trình tiếp tuyến Δ là:* $y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0)$

**** Chú ý:***

- Điểm $M_0\left(x_0;y_0\right)$ được gọi là tiếp điểm
- x_0 là hoành độ tiếp điểm và y_0 là tung độ tiếp điểm
- Điểm $M \in Ox$ thì tọa độ của M là $M\left(x;0\right)$; điểm $M \in Oy$ thì tọa độ của M là $M\left(0;y\right)$

VÍ DỤ: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$

1. Tại điểm $(2;-2)$
2. Tại điểm có hoành độ $x = -1$
3. Tại điểm có tung độ $y = -2$
4. Tại giao điểm của đồ thị với đường thẳng $y = x - 1$.

BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Bài 1. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm được chỉ ra:

a) (C): $y = 3x^3 - x^2 - 7x + 1$ tại A(0; 1)

b) (C): $y = x^4 - 2x^2 + 1$ tại B(1; 0)

c) (C): $y = \dfrac{3x+4}{2x-3}$ tại C(1; –7)

d)(C): $y = x + 1 - \dfrac{2}{2x-1}$ tại D(0; 3)

Bài 2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm được chỉ ra:

a) (C): $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}$ tại điểm A có $x_A = 4$

b) (C): $y = \dfrac{3(x-2)}{x-1}$ tại điểm B có $y_B = 4$

c) (C): $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ tại các giao điểm của (C) với trục hoành, trục tung.

d) (C): $y = x^3 - 3x + 1$ tại điểm uốn của (C).

e) (C): $y = \dfrac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \dfrac{9}{4}$ tại các giao điểm của (C) với trục hoành.

Bài 3. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm của (C) với đường được chỉ ra:

a) (C): $y = 2x^3 - 3x^2 + 9x - 4$ và d: $y = 7x + 4$.

b) (C): $y = 2x^3 - 3x^2 + 9x - 4$ và (P): $y = -x^2 + 8x - 3$.

c) (C): $y = 2x^3 - 3x^2 + 9x - 4$ và (C'): $y = x^3 - 4x^2 + 6x - 7$.

Bài 4. Cho hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 1$ có đồ thị (C). Tìm điểm M thuộc đồ thị (C) biết tiếp tuyến tại M đi qua gốc tọa độ .

Hướng dẫn:

$M\left(x_0; y_0\right) \in (C)$, Phương trình tiếp tuyến tại M:

$y = \left(6x_0^2 + 6x_0 - 12\right)\left(x - x_0\right) + 2x_0^3 + 3x_0^2 - 12x_0 - 1$

Tiếp tuyến đi qua O(0;0) nên $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 12$

BTTT: Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - \left(m-1\right)x^2 + \left(3m+1\right)x + m - 2$ tại điểm có hoành độ bằng 1 đi qua $A\left(2;-1\right)$.

Đáp số: $m = -2$

Bài 6. Tìm *m* để tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm được chỉ ra chắn hai trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng S cho trước:

a) (C): $y = \dfrac{2x + m}{x - 1}$ tại điểm A có $x_A = 2$ và S = $\dfrac{1}{2}$.

b) (C): $y = \dfrac{x - 3m}{x + 2}$ tại điểm B có $x_B = -1$ và S = $\dfrac{9}{2}$.

c) (C): $y = x^3 + 1 - m(x+1)$ tại điểm C có $x_C = 0$ và S = 8.

Hướng dẫn câu a)

$x_A = 2 \Rightarrow y_A = 4 + m$ và $f'(2) = -2 - m$. Phương trình tiếp tuyến tại $A\left(2;4+m\right)$ có dạng $\Delta : y = \left(-2-m\right)\left(x-2\right) + \left(4+m\right)$.

$\Delta \cap Ox = A\left(3m+8;0\right); \Delta \cap Oy = B\left(0;\dfrac{8+3m}{m+2}\right)$. Ta có: $S_{OAB} = \dfrac{1}{2}OA.OB = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\dfrac{22}{9} \\ m = -3 \end{array}\right.$

Bài 7 . Tính diện tích tam giác chắn hai trục toạ độ bởi tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm được chỉ ra: (C): $y = \dfrac{5x+11}{2x-3}$ tại điểm A có $x_A = 2$.

Câu 8. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-2}$. Cho *M* là điểm bất kì trên (*C*). Tiếp tuyến của (*C*) tại *M* cắt các đường tiệm cận của (*C*) tại *A* và *B*. Gọi *I* là giao điểm của các đường tiệm cận. Tìm toạ độ điểm *M* sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác *IAB* có diện tích nhỏ nhất.

Hướng dẫn:

Ta có: $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-3}{x_0-2}\right)$, $x_0 \neq 2$, $y'(x_0) = \dfrac{-1}{\left(x_0-2\right)^2}$

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M có dạng: $\Delta : y = \dfrac{-1}{\left(x_0-2\right)^2}(x - x_0) + \dfrac{2x_0-3}{x_0-2}$

Toạ độ giao điểm A, B của $\left(\Delta\right)$ và hai tiệm cận là: $A\left(2;\dfrac{2x_0-2}{x_0-2}\right)$; $B\left(2x_0-2;2\right)$

Ta thấy $\dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{2+2x_0-2}{2} = x_0 = x_M$, $\dfrac{y_A+y_B}{2} = \dfrac{2x_0-3}{x_0-2} = y_M$. Suy ra M là trung điểm của AB.

Mặt khác I = (2; 2) và tam giác IAB vuông tại I nên đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích

$$S = \pi IM^2 = \pi\left[(x_0-2)^2 + \left(\frac{2x_0-3}{x_0-2} - 2\right)^2\right] = \pi\left[(x_0-2)^2 + \frac{1}{(x_0-2)^2}\right] \geq 2\pi$$

Dấu "=" xảy ra khi $(x_0-2)^2=\dfrac{1}{(x_0-2)^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\\x_0=3\end{array}\right.$

Do đó có hai điểm M cần tìm là M(1; 1) và M(3; 3)

Bài 9. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$. Tìm tọa độ điểm M sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất .

Hướng dẫn:

Nếu $M\left(x_0;2-\dfrac{3}{x_0+1}\right)\in(C)$ thì tiếp tuyến tại M có phương trình

$y-2+\dfrac{3}{x_0+1}=\dfrac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)$ hay $3(x-x_0)-(x_0+1)^2(y-2)-3(x_0+1)=0$

Khoảng cách từ $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến là

$$d=\frac{\left|3(-1-x_0)-3(x_0+1)\right|}{\sqrt{9+\left(x_0+1\right)^4}}=\frac{6\left|x_0+1\right|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\frac{6}{\sqrt{\dfrac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2}}.$$

Theo bất đẳng thức Côsi $\dfrac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2\ge2\sqrt{9}=6$, vây $d\le\sqrt{6}$.

Khoảng cách d lớn nhất bằng $\sqrt{6}$ khi

$$\frac{9}{(x_0+1)^2}=(x_0+1)^2\Leftrightarrow\left(x_0+1\right)^2=3\Leftrightarrow x_0=-1\pm\sqrt{3}.$$

Vậy có hai điểm M : $M\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$ hoặc $M\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$

Bài 10. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là một điểm bất kỳ thuộc (C). Tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai đường tiệm cận tại A và B. Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận.

Chứng minh rằng

1. Chứng minh M là trung điểm của AB
2. Diện tích tam giác IAB không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

3. Tích khoảng cách từ từ điểm M đến hai tiệm cận là không đổi

Hướng dẫn câu 2

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)\in(C) <=> y_0=\dfrac{x_0+1}{x_0-1}\ (x_0\neq 1)$.

PTTT tại M có dạng: $y=-\dfrac{2}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{x_0+1}{x_0-1}\ (\Delta)$

Giao điểm của 2 tiệm cận: $\mathrm{I}(1;1)$.

Ta có

A = $(\Delta)\cap$ TCĐ => A=$\left(1;\dfrac{x_0+3}{x_0-1}\right)$; B = $(\Delta)\cap$ TCN => B =$\left(2x_0-1;1\right)$

IA = $\dfrac{4}{\left|x_0-1\right|}$; IB = $2\left|x_0-1\right|$.

Do đó: S_{IAB} = $\dfrac{1}{2}$.IA.IB = 4 (đvdt) không phụ thuộc vị trí M.

Bài 11. Cho hàm số $y=\dfrac{x}{x+1}$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số đã cho
2. Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) sao cho khoảng cách từ I đến tiếp tuyến bằng $\sqrt{2}$

Hướng dẫn:

$M\left(x_0;\dfrac{x_0}{x_0+1}\right)\in(C)$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm M có dạng $\Delta: y-\dfrac{x_0}{x_0+1}=\dfrac{1}{\left(x_0+1\right)^2}\left(x-x_0\right)$

Chuyển Δ về dạng phương trình tổng quát. Dùng công thức tính khoảng cach từ 1 điểm đến đường thẳng, g iải phương trình ta được $\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=-2\end{array}\right.$

Bài 12. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}\ (C)$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số
2. Tìm trên đồ thị (C) những điểm M sao cho tiếp tuyến tại M tạo với hai tiệm cận một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\sqrt{2}$

Hướng dẫn:

Gọi M$\left(x_0;\frac{2x_0-1}{x_0-1}\right)\in\left(C\right)$**.** Phương trình tiếp tuyến tại M cắt hai đường tiệm cận lần lượt tại $A\left(1;\frac{2x_0-1}{x_0-1}\right);B\left(2x_0-1;2\right)$. Ta thấy tam giác tạo thành là tam giác ABI vuông tại I có cạnh huyền là $AB = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{array}\right.$

Bài 13. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m,$ m là tham số

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi m=1
2. Biết A là điểm thuộc đồ thị hàm số có hoành độ bằng 1. Tìm m để khoảng từ điểm $B\left(\frac{3}{4};1\right)$ đến tiếp tuyến tại A là lớn nhất.

DẠNG 2: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN BIẾT HỆ SỐ GÓC

Phương pháp: *Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C): y =f(x), biết Δ có hệ số góc k cho trước.*

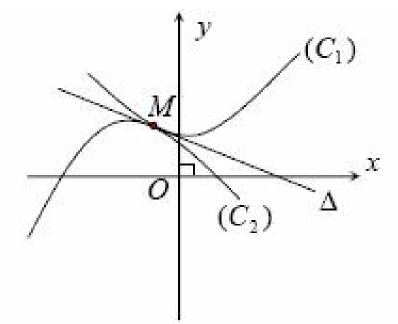
Cách 1: *Tìm toạ độ tiếp điểm.*

● *Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Tính $f'(x_0)$.*

● *Δ có hệ số góc k $\Rightarrow f'(x_0) = k$ (1)*

● *Giải phương trình (1), tìm được x_0 và tính $y_0 = f(x_0)$. Từ đó viết phương trình của Δ.*

Cách 2: *Dùng điều kiện tiếp xúc.*



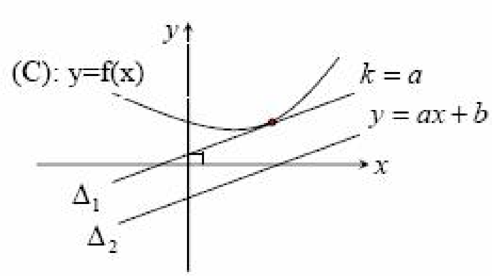
● *Phương trình đường thẳng Δ có dạng: y = kx + m.*

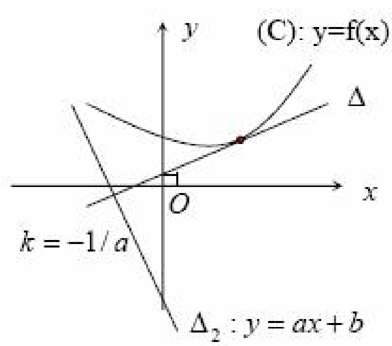
● *Δ tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:*

$$\begin{cases} f(x) = kx + m \\ f'(x) = k \end{cases} \quad (*)$$

● *Giải hệ (*), tìm được m. Từ đó viết phương trình của Δ.*

Chú ý: *Hệ số góc k của tiếp tuyến Δ có thể được cho gián tiếp như sau:*





+ *Δ tạo với chiều dương trục hoành góc α thì $k = \tan\alpha$*

+ *Δ song song với đường thẳng d: y = ax + b thì k = a*

+ Δ vuông góc với đường thẳng d: y = ax + b (a ≠ 0) thì $k = -\dfrac{1}{a}$

+ Δ tạo với đường thẳng d: y = ax + b một góc α *thì* $\left|\dfrac{k-a}{1+ka}\right| = \tan\alpha$

BÀI TẬP MẪU:

Bài 1. Cho $(C_m): y = \dfrac{(3m+1)x - m^2 + m}{x+m}, m \neq 0$. Định m để tiếp tuyến trên (C_m) tại giao điểm với trục hoành song song với đường thẳng y=x

Hướng dẫn:

Hoành độ giao điểm của (C) với trục hoành $x_0 = \dfrac{m^2 - m}{3m+1}, m \notin \left\{0; -\dfrac{1}{3}; 1\right\}$

$$y' = \frac{4m^2}{(x+m)^2}, y' = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = m \\ x_0 = -3m \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{m^2 - m}{3m+1} \\ -3m = \dfrac{m^2 - m}{3m+1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = -\dfrac{1}{5} \end{array}\right. \text{.........}$$

Bài 2. (Đại học A2011). Cho hàm số $y = \dfrac{-x+1}{2x-1}$

Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng $y = x + m$ luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B. Gọi $k_1 + k_2$ lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B. Tìm m để tổng $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng $d: y = x + m$

$$\frac{-x+1}{2x-1} = x + m,\ x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 2mx - (m+1) = 0$$

Phương trình (1) có $\Delta = m^2 + 2m + 2 = (m+1)^2 + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Phương trình (1) luôn có 2 nghiệm nên d luôn cắt (C) tại hai điểm A, B.

Hoành độ tiếp điểm tại A, B là $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình (1)

$\Rightarrow x_1 + x_2 = -m$ và $x_1.x_2 = -\dfrac{m+1}{2}$

Ta có: $k_1 + k_2 = -\dfrac{1}{(2x_1-1)^2} - \dfrac{1}{(2x_2-1)^2} = -\dfrac{4(x_1^2+x_2^2) - 4(x_1+x_2) + 2}{\left[4x_1x_2 - 2(x_1+x_2)+1\right]^2} = -4(m+1)^2 - 2$

$k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất bằng $-2 \Leftrightarrow m = -1$

BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Bài 1. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C), biết Δ có hệ số góc k được chỉ ra:

a) (C): $y = 2x^3 - 3x^2 + 5$; k = 12 b) (C): $y = \dfrac{2x-1}{x-2}$; k = –3

c) (C): $y = \dfrac{x^2 - 3x + 4}{x-1}$; k = –1

Bài 2. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C), biết Δ song song với đường thẳng d cho trước:

a) (C): $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$; $d: y = 3x + 2$ b) (C): $y = \dfrac{2x-1}{x-2}$; d: $y = -\dfrac{3}{4}x + 2$

c) (C): $y = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{4x+6}$; d: $2x + y - 5 = 0$ d) (C): $y = \dfrac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \dfrac{3}{2}$; $d: y = -4x + 1$

Bài 3. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C), biết Δ vuông góc với đường thẳng d cho trước:

a) (C): $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$; d: $y = -\dfrac{x}{8} + 2$ b) (C): $y = \dfrac{2x-1}{x-2}$; d: $y = x$

c) (C): $y = \dfrac{x^2+3}{x+1}$; d: y = –3x d) (C): $y = \dfrac{x^2+x-1}{x+2}$; $d: y = -2x$

Bài 4. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C), biết Δ tạo với chiều dương trục Ox góc α:

a) (C): $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + x - 4$; $\alpha = 60^0$ b)(C): $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + x - 4$; $\alpha = 75^0$

c) $(C): y = \dfrac{3x-2}{x-1}; \alpha = 45^0$

Bài 5. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C), biết Δ tạo với đường thẳng d một góc α:

a) (C): $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + x - 4; d: y = 3x + 7; \alpha = 45^0$

b) (C): $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + x - 4; d: y = -\dfrac{1}{2}x + 3; \alpha = 45^0$

c) $(C): y = \dfrac{4x-3}{x-1}; d: y = 3x; \alpha = 45^0$

d) $(C): y = \dfrac{3x-7}{-2x+5}; d: y = -x; \alpha = 60^0$

e) $(C): y = \dfrac{x^2 - x + 3}{x-2}; d: y = -x + 1; \alpha = 60^0$

Bài 7. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x}{x+1}$, biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A,B sao cho tam giác OAB cân tại O.

Hướng dẫn: Vì tam giác OAB cân tại O nên đường thẳng AB phải song song với một trong hai đường thẳng có phương trình $y = x$ hoặc $y = -x$

Ta có: $y' = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1$. Gọi $M_0(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của đồ thị hàm số

Do đó:

$$y'(x_0) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -2 \\ x_0 = 0 \end{array}\right.$$

$\oplus$ *Với* $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0$. Phương trình tiếp tuyến: $y = x$ (loại vì A ≡ B)

$\oplus$ Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 2$. Phương trình tiếp tuyến: $y = x + 4$ (*thõa*)

Bài 8. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + (m+4)x - \dfrac{1}{3} - m$, m là tham số

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi m=1

2. Tìm m để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của hàm số đi qua $A\left(3;-1\right)$

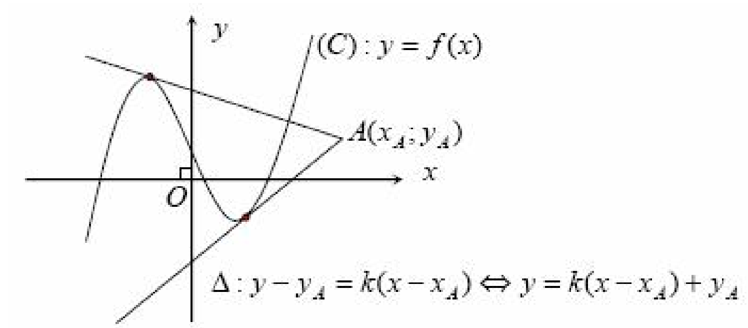
Hướng dẫn:

$f'(x_0) = x_0^2 - 4x_0 + 4 + m = \left(x_0 - 2\right)^2 + m \ge m.$ $Min\, f'(x_0) = m$ đạt được khi $x_0 = 2$
Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = m + 3.$

Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(2; m+3)$, sau đó thay tọa độ điểm A vào ta tìm được $m = -2$.

DẠNG 3: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN ĐI QUA MỘT ĐIỂM

Phương pháp: *Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C): y = f(x), biết Δ **đi qua** điểm* $A(x_A; y_A)$.



Cách 1: *Tìm toạ độ tiếp điểm.*

- *Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Khi đó: $y_0 = f(x_0)$, $y'_0 = f'(x_0)$.*
- *Phương trình tiếp tuyến Δ tại M: $y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0)$*
- *Δ đi qua $A(x_A; y_A)$ nên: $y_A - y_0 = f'(x_0).(x_A - x_0)$ (2)*
- *Giải phương trình (2), tìm được x_0. Từ đó viết phương trình của Δ.*

Cách 2: *Dùng điều kiện tiếp xúc.*

- *Phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(x_A; y_A)$ và có hệ số góc k:*

$y - y_A = k(x - x_A)$

- *Δ tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:*

$$\begin{cases} f(x) = k(x - x_A) + y_A \\ f'(x) = k \end{cases} \quad (*)$$

- *Giải hệ (*), tìm được x (suy ra k). Từ đó viết phương trình tiếp tuyến Δ.*

BÀI TẬP MẪU:

Bài 1. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$ (C).

Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(-6;5)$.

Hướng dẫn:

Phương trình đường thẳng đi qua $A(-6;5)$ là $(d): y = k(x+6)+5$.

(d) tiếp xúc (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm :

$$\begin{cases} k(x+6)+5=\dfrac{x+2}{x-2} \\ k=-\dfrac{4}{(x-2)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{4}{(x-2)^2}\cdot(x+6)+5=\dfrac{x+2}{x-2} \\ k=-\dfrac{4}{(x-2)^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4(x+6)+5(x-2)^2=(x+2)(x-2) \\ k=-\dfrac{4}{(x-2)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-24x=0 \\ k=-\dfrac{4}{(x-2)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0;k=-1 \\ x=6;k=-\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$$

Suy ra có 2 tiếp tuyến là : $(d_1): y=-x-1;\ (d_2): y=-\dfrac{x}{4}+\dfrac{7}{2}$

BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Bài 1. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C), biết Δ **đi qua** điểm được chỉ ra:

a) (C): $y=-x^3+3x-2$; A(2; –4)

b) (C): $y=x^3-3x+1$; B(1; –6)

c) (C): $y=\left(2-x^2\right)^2$; C(0; 4)

d)(C): $y=\dfrac{1}{2}x^4-3x^2+\dfrac{3}{2}$; $D\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$

e) (C): $y=\dfrac{x+2}{x-2}$; E(–6; 5)

f) (C): $y=\dfrac{3x+4}{x-1}$; F(2; 3)

g) (C): $y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-2}$; G(1; 0)

h) $y=\dfrac{x^2-x+2}{x-1}$; H(2; 2)

DẠNG 4: TÌM NHỮNG ĐIỂM TRÊN ĐỒ THỊ $(C): y = f(x)$ SAO CHO TẠI ĐÓ TIẾP TUYẾN CỦA (C) SONG SONG HOẶC V UÔNG GÓC VỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG d CHO TRƯỚC

PHƯƠNG PHÁP:

- *Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$. Δ là tiếp tuyến của (C) tại M. Tính $f'(x_0)$.*
- *Vì $\Delta // d$ nên $f'(x_0) = k_d$ (1)*

  hoặc $\Delta \perp d$ nên $f'(x_0) = -\dfrac{1}{k_d}$ (2)
- *Giải phương trình (1) hoặc (2) tìm được x_0. Từ đó tìm được $M(x_0; y_0) \in (C)$.*

BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Bài 1. Cho $(C_m): y = \dfrac{(m-1)x+m}{x-m}$. Định m để tiếp tuyến trên (C_m) có hoành độ x_0=4 thì song song với đường phân giác thứ hai của gốc hệ tọa độ.

Hướng dẫn:

$$f'(x) = \frac{-m^2}{(x-m)^2}, f'(x) = -1 \Leftrightarrow m = 2$$

Bài 2. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - x + \dfrac{2}{3}$ có đồ thị (C). Tìm trên (C) mà tiếp tuyến tại đó của đồ thị vuông gốc với đường thẳng $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$

Bài 3. Tìm các điểm trên đồ thị (C) mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng d cho trước:

a) (C): $y = \dfrac{x^2+3x+6}{x+1}$; d: $y = \dfrac{1}{3}x$

b) (C): $y = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$; d là tiệm cận xiên của (C)

c) (C): $y = \dfrac{x^2+x-1}{x-1}$; d là đường thẳng đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu của

(C).

d) (C): $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x}$; d: y = x

Bài 4. Tìm các điểm trên đồ thị (C) mà tiếp tuyến tại đó song song với đường thẳng d cho trước:

a) (C): $y = x^3 + x^2 + x + 10$; d: $y = 2x$ b) (C): $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x}$; d: y = –x

Bài 5. Tìm m để tiếp tuyến Δ của (C) tại điểm được chỉ ra song song với đường thẳng d cho trước:

a) (C): $y = \dfrac{(3m+1)x - m^2 + m}{x + m}$ $(m \neq 0)$ tại điểm A có $y_A = 0$ và d: $y = x - 10$.

Bài 6. Tìm m để tiếp tuyến Δ của (C) tại điểm được chỉ ra vuông góc với đường thẳng d cho trước:

a) (C): $y = \dfrac{x^2 + (2m+1)x - 2 + m}{x + 1}$ tại điểm A có $x_A = 0$ và d là tiệm cận xiên của (C).

b) (C): $y = \dfrac{2x^2 + mx - 1}{x - 3}$; tại điểm B có $x_B = 4$ và d: x – 12y + 1 = 0 .

DẠNG 5: TÌM NHỮNG ĐIÊM TRÊN ĐƯỜNG THẲNG d HOẶC TRÊN (C) MÀ TỪ ĐÓ KẺ ĐƯỢC 1,2,3,… TIẾP TUYẾN VỚI ĐỒ THỊ

PHƯƠNG PHÁP:

Giả sử d: $ax + by + c = 0$. $M(x_M; y_M) \in d$.

- *Phương trình đường thẳng Δ qua M có hệ số góc k: $y = k(x - x_M) + y_M$*
- *Δ tiếp xúc với (C) khi hệ sau có nghiệm:*

$$\begin{cases} f(x) = k(x - x_M) + y_M & (1) \\ f'(x) = k & (2) \end{cases}$$

- *Thế k từ (2) vào (1) ta được: $f(x) = (x - x_M).f'(x) + y_M$ (3)*
- *Số tiếp tuyến của (C) vẽ từ M = Số nghiệm x của (3)*

BÀI TẬP MẪU:

Bài 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C)

1. Qua A(1;0) kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến với (C). Hãy viết phương trình tiếp tuyến ấy.
2. Chứng minh rằng không có tiếp tuyến nào khác của (C) song song với tiếp tuyến qua A của (C) nói trên

Hướng dẫn:

1) Gọi d là đường thẳng đi qua A(1;0) $\Rightarrow$ d:$y = k(x-1)$. d là tiếp tuyến của (C)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 = k(x-1) \\ 3x^2 - 6 = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ k = -3 \end{cases}$. Vậy có 1 tiếp tuyến

2) Gọi Δ là tiếp tuyến khác của (C) song song với tiếp tuyến tại A

$\Rightarrow \Delta: y = x + b$.Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của hệ phương trình

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 = -3x^2 + b \\ 3x^2 - 6 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow \Delta: y = -3x + 3$

$\Delta \equiv d$ vậy không có tiếp tuyến nào khác song song với tiếp tuyến tại A

Bài 2. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Tìm những điểm trên trục tung mà từ mỗi điểm ấy chỉ có thể kẻ đúng một tiếp tuyến với (C)

Hướng dẫn:

$A(0;a) \in d: x = 0$(truc tung). Phương trình tiếp tuyến kẻ từ A

$y = kx + a$. Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của hệ phương trìn:

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} = kx + a \\ k = \dfrac{-2}{(x-1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow (a-1)x^2 - 2(a+1)x + a + 1 = 0(*)$$

Qua A kẻ được 1 tiếp tuyến $\Leftrightarrow$ (*) có1 nghiệm

$\oplus a = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow A(0;1)$

$\oplus \begin{cases} a \neq 1 \\ \Delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -1 \Rightarrow A(a;-1)$

Bài 3. Cho hàm số $y = mx^3 - (m-1)x^2 - (m+2)x + m - 1$ có đồ thị (C_m).

a) Tìm m để (C_m) đạt cực đại tại x=-1

b) Khi m=-1, tìm trên đường thẳng y=2 những điểm từ đó kẻ 3 tiếp tuyến đến (C)

Hướng dẫn:

$(C): y = x^3 - 3x;\ A(a;2) \in d: y = 2$. Phương trình tiếp tuyến kẻ từ A

$y = k(x-a) + 2$. Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của hệ phương trìn:

Ta có: $\begin{cases} x^3 - 3x = k(x-a) + 2 \\ k = 3x^2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ g(x) = 2x^2 - (3a+2)x + 3a + 2 = 0 \end{array}\right.$

Qua A kẻ được 3 tiếp tuyến $\Leftrightarrow$ g(x)=0 có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ a < -\dfrac{2}{3} \vee a > 2 \end{cases}$$

BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Bài 1. Từ một điểm bất kì trên đường thẳng d có thể kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến với (C):

a) $(C): y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$; d: x = 2 b) $(C): y = x^3 - 3x$; d: x = 2

Bài 2. Tìm các điểm trên đồ thị (C) mà từ đó vẽ được **đúng một** tiếp tuyến với (C):

a) $(C): y = -x^3 + 3x^2 - 2$ b) $(C): y = x^3 - 3x + 1$

Bài 3. Tìm các điểm trên đường thẳng d mà từ đó vẽ được **đúng một** tiếp tuyến với (C):

a) $(C): y = \dfrac{x+1}{x-1}$; d là trục tung b) $(C): y = \dfrac{x^2+x+2}{x-1}$; d là trục hoành

c) $(C): y = \dfrac{2x^2+x}{x+1}$; d: y = 1 d) $(C): y = \dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$; d: x = 1

e) $(C): y = \dfrac{x+3}{x-1}$; d: y = 2x + 1

Bài 4. Tìm các điểm trên đường thẳng d mà từ đó vẽ được **ít nhất một** tiếp tuyến với (C):

a) $(C): y = \dfrac{x^2-6x+9}{-x+2}$; d là trục tung b) $(C): y = \dfrac{x^2+3x+3}{x+1}$; d là trục tung

c) $(C): y = \dfrac{2x+1}{x-2}$; d: x = 3 d) $(C): y = \dfrac{3x+4}{4x-3}$; d: y = 2

Bài 5. Tìm các điểm trên đường thẳng d mà từ đó vẽ được **hai** tiếp tuyến với (C):

a) $(C): y = \dfrac{x^2+x-2}{x+2}$; d là trục hoành b) $(C): y = \dfrac{x^2-x-1}{x+1}$; d là trục tung

c) $(C): y = \dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$; d: y = –5

Bài 6. Tìm các điểm trên đường thẳng d mà từ đó vẽ được **ba** tiếp tuyến với (C):

a) $(C): y = -x^3 + 3x^2 - 2$; d: y = 2 b) $(C): y = x^3 - 3x$; d: x = 2

c) $(C): y = -x^3 + 3x + 2$; d là trục hoành d) $(C): y = x^3 - 12x + 12$; d: y = –4

e) $(C): y = x^4 - x^2 - 2$; d là trục tung e) $(C): y = -x^4 + 2x^2 - 1$; d là trục tung

Bài 7. Từ điểm A có thể kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến với (C):

a) $(C): y = x^3 - 9x^2 + 17x + 2$; A(–2; 5)

b) $(C): y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 4;\ A\left(\frac{4}{9}; \frac{4}{3}\right)$

c) $(C): y = 2x^3 + 3x^2 - 5;\ A(1; -4)$

Bài 8. Cho đồ thị hàm số $(C): y = x^3 - 3x^2 + 4$. Tìm tập hợp các điểm trên trục hoành sao cho từ đó có thể kẻ được 3 tiếp tuyến với (*C*).

Bài 9. Cho đt hàm số $(C): y = x^4 - 2x^2 + 1$. Tìm các điểm *M* nằm trên *Oy* sao cho từ *M* kẻ được 3 tiếp tuyến đến (*C*).

Bài 10. Đồ thị hàm số $(C): y = x^3 - 3x + 2$. Tìm các điểm trên đường thẳng $y = 4$ sao cho từ đó có thể kẻ được 3 tiếp tuyến với (*C*).

DẠNG 6: Tìm những điểm mà từ đó có thể vẽ được 2 tiếp tuyến với đồ thị (C): y = f(x) và 2 tiếp tuyến đó vuông góc với nhau

Phương Pháp:

Gọi $M(x_M; y_M)$.

- *Phương trình đường thẳng Δ qua M có hệ số góc k: $y = k(x - x_M) + y_M$*
- *Δ tiếp xúc với (C) khi hệ sau có nghiệm:*

$$\begin{cases} f(x) = k(x - x_M) + y_M & (1) \\ f'(x) = k & (2) \end{cases}$$

- *Thế k từ (2) vào (1) ta được: $f(x) = (x - x_M).f'(x) + y_M$ (3)*
- *Qua M vẽ được 2 tiếp tuyến với (C) $\Leftrightarrow$ (3) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2.*
- *Hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau $\Leftrightarrow f'(x_1).f'(x_2) = -1$*

Từ đó tìm được M.

Chú ý: *Qua M vẽ được 2 tiếp tuyến với (C) sao cho 2 tiếp điểm nằm về hai phía với trục hoành thì* $\begin{cases} (3) \text{ có 2 nghiệm phân biệt} \\ f(x_1).f(x_2) < 0 \end{cases}$

BÀI TẬP MẪU:

Bài 1. Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 + 1$ có đồ thị (C_m). Tìm m để (C_m) cắt d: $y = -x + 1$ tại ba điểm phân biệt $A(0;1)$, B, C sao cho các tiếp tuyến của (C_m) tại B và C vuông góc với nhau.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C_m) là:

$x^3 + mx^2 + 1 = -x + 1 \Leftrightarrow x(x^2 + mx + 1) = 0$ (*)

Đặt $g(x) = x^2 + mx + 1$. d cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta g = m^2 - 4 > 0 \\ g(0) = 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array} \right.$$

Vì x_B , x_C là nghiệm của $g(x) = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} S = x_B + x_C = -m \\ P = x_B x_C = 1 \end{cases}$.

Tiếp tuyến của (C_m) tại B và C vuông góc với nhau nên ta có: $f'(x_C)f'(x_B) = -1$

$\Leftrightarrow x_B x_C(3x_B + 2m)(3x_C + 2m) = -1 \Leftrightarrow x_B x_C\left[9x_B x_C + 6m(x_B + x_C) + 4m^2\right] = -1$

$\Leftrightarrow 1\left[9 + 6m(-m) + 4m^2\right] = -1 \Leftrightarrow 2m^2 = 10 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{5}$ (nhận so với điều kiện)

Bài 2. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$. Tìm tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ để từ đó có thể kẻ đến (C) hai tiếp tuyến vuông góc.

Lời giải:

Gọi $M(x_0;y_0)$. Phương trình đường thẳng d qua M có hệ số góc k là $y = k(x - x_0) + y_0$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d: $\dfrac{x^2 + 1}{x} = k(x - x_0) + y_0, (kx \neq 0)$

$\Leftrightarrow (1 - k)x^2 - (y_0 - kx_0)x + 1 = 0\ (*)$

d tiếp xúc với (C)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 1 \\ \Delta = (y_0 - kx_0)^2 - 4(1 - k) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 1 \\ x_0^2 k^2 + 2(2 - x_0 y_0)k + y_0^2 - 4 = 0\ (\mathrm{I}) \\ y_0 \neq kx_0 \end{cases}$$

Từ M vẽ hai tiếp tuyến đến (C) vuông góc với nhau khi (1) có hai nghiệm phân

biệt thỏa mãn: $\begin{cases} k_1, k_2 \neq 1 \\ k_1 k_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq 0 \\ \dfrac{y_0^2 - 4}{x_0^2} = -1 \\ (y_0 - x_0)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq 0 \\ x_0^2 + y_0^2 = 4 \\ y_0 \neq x_0 \end{cases}$.

Vậy tập hợp các điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán là một đường tròn: $x^2 + y^2 = 4$ loại bỏ bốn giao điểm của đường tròn với hai đường tiệm cận.

Bài 3. Cho hàm số: $y = \dfrac{x + 2}{x - 1}$ (C). Cho điểm A(0; a) Tìm a để từ A kẻ được 2 tiếp tuyến tới đồ thị (C) sao cho 2 tiếp điểm tương ứng nằm về 2 phía của trục hoành.

Hướng dẫn:

Phương trình tiếp tuyến qua A(0;a) có dạng $y = kx + a$ (1)

Điều kiện có hai tiếp tuyến qua A: $\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} = kx - a & (2) \\ \dfrac{-3}{(x-1)^2} = k & (3) \end{cases}$ có nghiệm $x \neq 1$

Thay (3) vào (2) và rút gọn ta được: $(a-1)x^2 - 2(a+2)x + a + 2 = 0$ (4)

Để (4) có 2 nghiệm $x \neq 1$ là: $\begin{cases} a \neq 1 \\ f(1) = -3 \neq 0 \\ \Delta' = 3a + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ a > -2 \end{cases}$

Hoành độ tiếp điểm $x_1; x_2$ là nghiệm của (4)

Tung độ tiếp điểm là $y_1 = \dfrac{x_1+2}{x_1-1}$, $y_2 = \dfrac{x_2+2}{x_2-1}$

Để hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục ox là: $y_1.y_2 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x_1+2)(x_2+2)}{(x_1-1)(x_2-2)} < 0$

$\dfrac{x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 4}{x_1x_2 - (x_1+x_2) + 1} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{9a+6}{-3} < 0 \Leftrightarrow a > -\dfrac{2}{3}$. Vậy $-\dfrac{2}{3} < a \neq 1$ thoả

BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Bài 1. Chứng minh rằng từ điểm A luôn kẻ được hai tiếp tuyến với (C) vuông góc với nhau. Viết phương trình các tiếp tuyến đó:

a) $(C): y = 2x^2 - 3x + 1;\ A\left(0; -\dfrac{1}{4}\right)$ b) $(C): y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1};\ A(1;-1)$

c) $(C): y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1};\ A(1;0)$

Bài 2. Tìm các điểm trên đường thẳng d mà từ đó có thể vẽ được hai tiếp tuyến với (C) vuông góc với nhau:

a) $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$; d: y = –2 b) $(C): y = x^3 + 3x^2$; d là trục hoành

c) $(C): y = \dfrac{2x^2 + x + 1}{x + 1}$; d là trục tung

d) $(C): y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$; d là trục tung

e) $(C): y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x}$; d: x = 1

Bài 3. Tìm m để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt mà tại đó hai tiếp tuyến với (C) vuông góc với nhau:

a) $(C): y = \dfrac{-x^2 + x - m}{2x + m}$; d: y = –1

b) $(C): y = \dfrac{x^2 + mx - 8}{x - m}$; d là trục hoành

c) $(C): y = \dfrac{x^2 - 2mx + m}{x + m}$; d là trục hoành

Bài 4. Tìm m để từ điểm A kẻ được 2 tiếp tuyến v ới (C) sao cho 2 tiếp điểm nằm về hai phía với trục hoành $(C): y = \dfrac{x + 2}{x - 1}$; $A(0; m)$

Bài 5. Cho hàm số $(C): y = x^3 - 3x^2 + 4$

1. Khảo sát hàm số.
2. Gọi (d) là đường thẳng đi qua điểm A(2 ; 0) có hệ số góc k.Tìm k để (d) cắt (C) tại ba điểm phân biệt A ; M ; N sao cho hai tiếp tuyến của (C) tại M và N vuông góc với nhau.

Hướng dẫn:

Phương trình đường thẳng $d: y = k\left(x - 2\right)$

Hoành độ A;M;N là nghiệm của phương trình :

$$x^3 - 3x^2 + 4 = k\left(x - 2\right) \Leftrightarrow \left(x - 2\right)\left(x^2 - x - 2 - k\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 = x_A \\ f(x) = x^2 - x - 2 - k = 0 \end{array}\right.$$

Phương trình 3nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow f(x) = 0$ có 2nghiệm phân biệt khác 2

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{9}{4} < k \neq 0$.Theo Viét ta có $\begin{cases} x_M + x_N = 1 \\ x_M x_N = -k - 2 \end{cases}$

Tiếp tuyến tại M và N vuông góc với nhau $\Leftrightarrow y'\left(x_M\right).y'\left(x_N\right) = -1$

$\Leftrightarrow (3x_M^2 - 6x_M)(3x_N^2 - 6x_N) = -1 \Leftrightarrow 9k^2 + 18k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = \dfrac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{3}$

Bài 6. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2$ có đồ thị (C). Tìm những điểm trên trục hoành mà từ đó vẽ được đúng ba tiếp tuyến của đồ thị (C), trong đó có 2 tiếp tuyến vuông góc với nhau.

Hướng dẫn:

$M\left(m;0\right) \in Ox$. *Đường* thẳng d qua M:y=k$\left(x - m\right)$.

d là tiếp tuyến $\Leftrightarrow$ hệ sau có nghiệm$\begin{cases} x^3 + 3x^2 = \mathrm{k}\left(x - m\right) \\ 3x^2 + 6x = k \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2x^2 + 3\left(1 - m\right)x - 6m = 0 (*) \end{array}\right.$

Qua M kẻ được ba tiếp tuyến $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ -\dfrac{1}{3} < m \neq 0 \end{array}\right.$.

Phương trình (*) có hai nghiệm và $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2}{3}\left(m - 1\right) \\ x_1 x_2 = -3m \end{cases}$

Qua M kẻ được ba tiếp tuyến của (C) thì $k_1 = 3x_1^2 + 6x_1, k_2 = 3x_2^2 + 6x_2, k_3 = 0$

Theo đề: $k_1.k_2 = -1 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{27} (thỏa)$.

DẠNG 7: LẬP PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN CHUNG CỦA HAI ĐỒ THỊ

$$\left(C_1\right): y = f(x) \text{ và } \left(C_2\right): y = g(x)$$

PHƯƠNG PHÁP:

1. *Gọi Δ: $y = ax + b$ là tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2).*

u là hoành độ tiếp điểm của Δ và (C_1), v là hoành độ tiếp điểm của Δ và (C_2).

- *Δ tiếp xúc với (C_1) và (C_2) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:*

$$\begin{cases} f(u) = au + b & (1) \\ f'(u) = a & (2) \\ g(v) = av + b & (3) \\ g'(v) = a & (4) \end{cases}$$

- *Từ (2) và (4) $\Rightarrow f'(u) = g'(v) \Rightarrow u = h(v)$ (5)*
- *Thế a từ (2) vào (1) $\Rightarrow b = \varphi(u)$ (6)*
- *Thế (2), (5), (6) vào (3) $\Rightarrow v \Rightarrow a \Rightarrow u \Rightarrow b$. Từ đó viết phương trình của Δ.*

2. *Nếu (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ x_0 thì một tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) cũng là tiếp tuyến của (C_1) (và (C_2)) tại điểm đó.*

BÀI TẬP MẪU:

Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai parabol

$(P_1): y = \frac{1}{2}x^2 + 1;\quad (P_2): y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$

Hướng dẫn:

BÀI TẬP ÁP DỤNG: Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đồ thị:

a) $(C_1): y = x^2 - 5x + 6; (C_2): y = -x^2 + 5x - 11$

b) $(C_1): y = x^2 - 5x + 6; (C_2): y = -x^2 - x - 14$

c) $(C_1): y = x^2 - 5x + 6; (C_2): y = x^3 + 3x - 10$

DẠNG 8: SỰ TIẾP XÚC HAI ĐỒ THỊ

PHƯƠNG PHÁP:

Cho hai hàm số $(C): y = f(x)$; $(C'): y = g(x)$

Để (C) và (C') tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$

Điều kiện cần và đủ để đường thẳng $\Delta: y = kx + b\left(k \neq 0\right)$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ là $\begin{cases} f(x) = kx + b \\ f'(x) = k \end{cases}$

BÀI TẬP MẪU:

Bài 1. Tìm m để đồ thị các hàm số $y = mx^2, y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 1$ tiếp xúc với nhau.

Hướng dẫn:

Đồ thị hai hàm số tiếp xúc với nhau khi hệ sau có nghiệm $\begin{cases} mx^2 = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 & (1) \\ 2mx = -x + 2 & (2) \end{cases}$.

<u>Nhận xét rằng:</u>

- Giá trị x tìm được chính là hoành độ tiếp điểm
- Giá trị m tìm được chính là giá trị tham số để hai đồ thị tiếp xúc

Từ (2) ta suy ra rằng: $x = \frac{2}{2m+1}\left(m \neq -\frac{1}{2}\right)$ thay vào (1) ta được $m = \pm 2$

<u>Chú ý rằng:</u> Nếu tiếp tục giải tìm x ta tìm được hoành độ tiếp điểm, nhưng bài toán không đòi hỏi điều đó.

Bài 2. Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} - m\left(x+1\right)$ tiếp xúc với trục hoành.

Hướng dẫn:

Đồ thị hàm số tiếp xúc với trục hoành :y=0 khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} \dfrac{x^3}{3} - m\left(x+1\right) = 0 & (1) \\ x^2 - m = 0 & (2) \end{cases}$$

Từ (2) ta được: $x = \pm\sqrt{m}, \left(m > 0\right)$

- Vơi $x = \sqrt{m}$ thay vào (1) ta được $m = 0$
- Vơi $x = -\sqrt{m}$ thay vào (1) ta được $m = 0$ hoặc $m = \dfrac{9}{4}$

BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Bài 1. Tìm m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{\left(2m-1\right)x - m^2}{x-1}$ tiếp xúc với đường thẳng $y = x$

Bài 2. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - x + 3m$ $\left(C_m\right)$. Định *m* để $\left(C_m\right)$ tiếp xúc với trục hoành.

Bài 3. Cho hàm số $y = x^4 + x^3 + \left(m-1\right)x^2 - x - m$ $\left(C_m\right)$. Định *m* để $\left(C_m\right)$tiếp xúc với trục hoành.

Bài 4. Xác định a để $(C): y = \left(x+1\right)^2\left(x-1\right)^2$ tiếp xúc với $(P): y = ax^2 - 3$

Bài 5. Chứng minh rằng với mọi m, $(C_m): y = \dfrac{\left(m-2\right)x - \left(m^2 - 2m + 4\right)}{x-m}$ luôn tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: y = x - 6$

Bài 6. Cho hàm số $y = x^4 - 2(2m^2 - 1)x^2 + m$ (1)

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi m = 1.

2/ Tìm m để đồ thị của hàm số (1) tiếp xúc với trục hòanh.

DẠNG 9: MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC VỀ TIẾP TUYẾN

Bài 1. Cho hypebol (H) và điểm M bất kì thuộc (H). Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận. Tiếp tuyến tại M cắt 2 tiệm cận tại A và B.

1) Chứng minh M là trung điểm của đoạn AB.

2) Chứng minh diện tích của ΔIAB là một hằng số.

3) Tìm điểm M để chu vi ΔIAB là nhỏ nhất.

a) $(H): y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ b) $(H): y=\dfrac{x+1}{x-1}$ c) $(H): y=\dfrac{4x-5}{-2x+3}$

Bài 2. Cho hypebol (H) và điểm M bất kì thuộc (H). Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận. Tiếp tuyến tại M cắt 2 tiệm cận tại A và B.

1) Chứng minh M là trung điểm của đoạn AB.

2) Chứng minh tích các khoảng cách từ M đến 2 đường tiệm cận là không đổi.

2) Chứng minh diện tích của ΔIAB là một hằng số.

3) Tìm điểm M để chu vi ΔIAB là nhỏ nhất.

a) $(H): y=\dfrac{x^2-3x+4}{2x-2}$ b) $(H): y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$

c) $(H): y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$

Bài 3. Tìm m để tiếp tuyến tại điểm M bất kì thuộc hypebol (H) cắt hai đường tiệm cận tạo thành một tam giác có diện tích bằng S:

a) $(H): y=\dfrac{2mx+3}{x-m}; S=8$

Bài 4. Tìm điểm M thuộc hypebol (H) tại đó tiếp tuyến cắt các trục toạ độ tại các điểm A, B sao cho ΔOAB vuông cân:

a) $(H): y=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$ b) $(H): y=\dfrac{2x^2+5x}{x+2}$

c) $(H): y = \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$

Bài 5. Cho (C): $y = \dfrac{2x^2 - x + 1}{x - 1}$. Chứng minh rằng trên đường thẳng d: y = 7 có 4 điểm sao cho từ mỗi điểm có thể kẻ đến (C) hai tiếp tuyến tạo với nhau một góc 45^0.

Bài 6. Viết phương trình tiếp tuyến với đường cong (C) tạo với các trục toạ độ một tam giác có diện tích S cho trước:

a) $(C): y = x + \dfrac{1}{x}; S = 4$

b) $(C): y = \dfrac{x^3 + 1}{x}; S = \dfrac{1}{2}$

MỘT SỐ BÀI TẬP CHỌN LỌC VỀ TIẾP TUYẾN

Bài 1. Cho hàm số $(C): y = \frac{2x-1}{x-1}$. Tìm trên (C) những điểm M sao cho tiếp tuyến tại M tạo với hai tiệm cận của đồ thị (C) một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\sqrt{2}$.

Hướng dẫn:

Bước 1: $M\left(x_0; \frac{2x_0-1}{x_0-1}\right)$. Tiệm cận ngang $y=2;$ tiệm cận đứng $x=1$

Bước 2: Phương trình tiếp tuyến tại M_0 có dạng : $\Delta: y = -\frac{1}{\left(x_0-1\right)^2}\left(x-x_0\right)+\frac{2x_0-1}{x_0-1}$

Bước 3: Tiếp tuyến cắt các tiệm cân lần lượt tại $A\left(1; \frac{2x_0}{x_0-1}\right); B\left(2x_0-1; 2\right)$

Bước 4: Từ giả thiết ta suy ra được $AB = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{array}\right.$

Bài 2. Cho hàm số $(C): y = x^4 - 2mx^2 + m$. Biết A là điểm thuộc đồ thị hàm số (C) có hoành độ bằng 1. Tìm m để khoảng cách từ điểm $B\left(\frac{3}{4}; 1\right)$ đến tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại A đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn:

Bước 1: $A\left(1; 1-m\right)$. Phương trình tiếp tuyến tại A có dạng:

$\left(4-4m\right)x - y - 3\left(1-m\right) = 0$

Bước 2: Khoảng cách từ B đến tiếp tuyến là $d = \frac{1}{\sqrt{16\left(1-m\right)^2+1}} \le 1$. Dấu "=" xảy ra khi m=1. Lúc đó $d=1$

Bài 3. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \left(m+4\right)x + \frac{1}{3} - m$. Tìm m để tiếp tuyến tại điểm có hệ số góc nhỏ nhất đi qua $A\left(3; -1\right)$

Hướng dẫn:

Bước 1: Ta có $k=\left(x_0-2\right)^2+m\ge m$. $k_{\min}=m\Leftrightarrow x_0=2\Rightarrow M\left(2;m+3\right)$

Bước 2: Viết phương trình tiếp tuyến tại M, sau đó thay tọa độ điểm A vào ta được $m=-2$

Vấn đề 3: Vẽ đồ thị hàm số có chứa giá trị tuyệt đối

__DẠNG 1:__ Cho hàm số $y = f(x)$ (C) hãy vẽ đồ thị hàm số (C') $y = \left|f(x)\right|$

__Phương pháp:__

Ta có: $y = \left|f(x)\right| = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } f(x) \geq 0 \quad \left(C_1'\right) \\ -f(x) & \text{nếu } f(x) < 0 \quad \left(C_2'\right) \end{cases}$

Suy ra: Đồ thị (C') gồm **2** phần:

- $\left(C_1'\right)$ là phần đồ thị của (C) ứng với $y \geq 0$ (phía trên trục hoành)
- $\left(C_2'\right)$ là phần đồ thị lấy đối xứng phần $y < 0$ của đồ thị (C) qua trục **Ox**.

BÀI TẬP MẪU:

Bài 1.

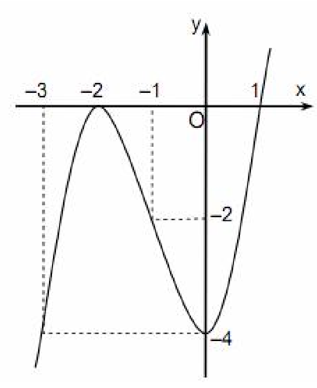
a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số sau: $y = x^3 + 3x^2 - 4$

b) Vẽ đồ thị hàm số $y = \left|x^3 + 3x^2 - 4\right|$

Hướng dẫn:

a) Bảng biến thiên và đồ thị:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$



b) Ta có:

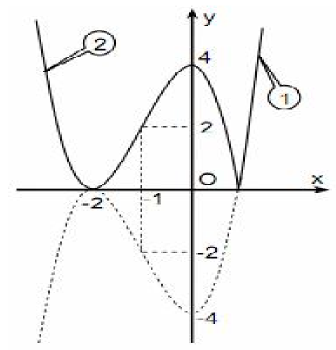
$$y=\left|x^3+3x^2-4\right|=\begin{cases}x^3+3x^2-4 & \text{nếu } x^3+3x^2-4\ge 0\\ -\left(x^3+3x^2-4\right) & \text{nếu } x^3+3x^2-4<0\end{cases}$$

Đồ thị hàm số bao gồm:

- Giữ lại đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-4$ phía trên trục Ox
- Lấy đối xứng qua Ox phần đồ thị nằm phía dưới Ox

Chú ý:
(1) là phần đồ thị nằm bên trên Ox của đồ thị $y=x^3+3x^2-4$ và được giữ lại.

(2) là hình đối xứng của phần đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-4$ nằm bên dưới Ox (nét đứt).



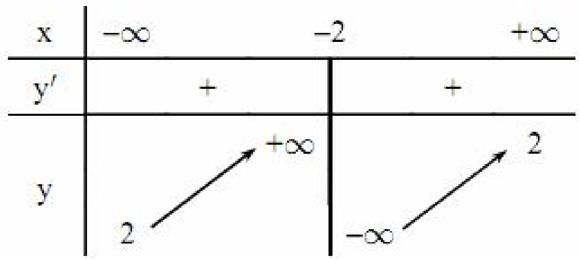
Bài 2.

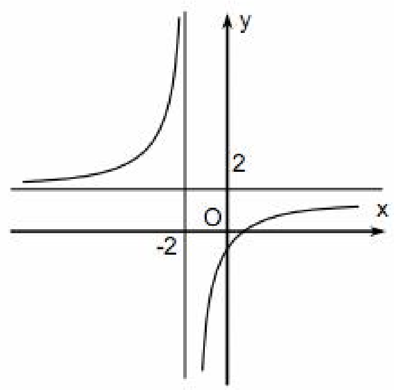
a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$

b) Vẽ đồ thị hàm số $y=\left|\dfrac{2x-1}{x+2}\right|$

Hướng dẫn:

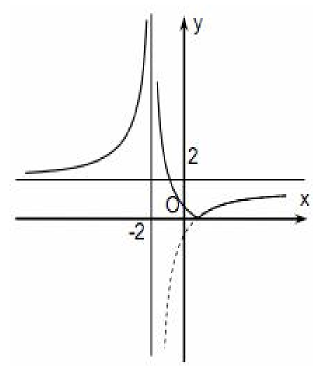
a) Bảng biến thiên và đồ thị:





b) Ta có:

$$y=\left|\frac{2x-1}{x+2}\right|=\begin{cases}\dfrac{2x-1}{x+2} & \text{nếu } \dfrac{2x-1}{x+2}>0\\ -\dfrac{2x-1}{x+2} & \text{nếu } \dfrac{2x-1}{x+2}<0\end{cases}$$



Đồ thị hàm số:

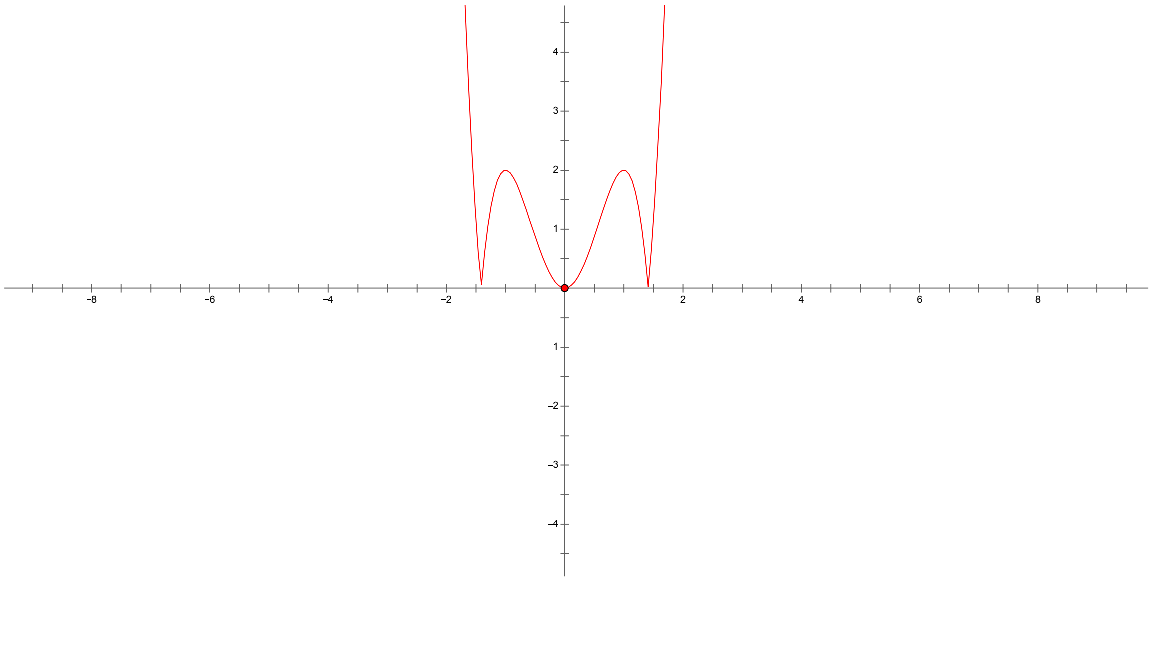
- Giữ lại đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ phía trên trục Ox
- Lấy đối xứng qua Ox phần đồ thị nằm phía dưới Ox

Bài 3. (ĐHB-2009). Cho hàm số $y=2x^4-4x^2$

1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số
2. Với các giá trị nào của m, phương trình $x^2\left|x^2-2\right|=m$ có 6 nghiệm phân biệt

Hướng dẫn:

$$x^2\left|x^2-2\right|=m\Leftrightarrow 2x^2\left|x^2-2\right|=2m\Leftrightarrow\left|2x^4-4x^2\right|=2m$$



-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4

DẠNG 2: Cho hàm số $y = \frac{U(x)}{x-a}$ (C) hãy vẽ đồ thị hàm số

(C') $y = \frac{U(x)}{|x-a|}$ **hoặc** $y = \frac{|U(x)|}{x-a}$

PHƯƠNG PHÁP:

Ta có:

$$y = \frac{U(x)}{|x-a|} = \begin{cases} \frac{U(x)}{x-a} & \text{nếu } x > a \quad (C_1') \\ -\frac{U(x)}{x-a} & \text{nếu } x < a \quad (C_2') \end{cases}$$

Suy ra: Đồ thị (C') gồm **2** phần:

- (C_1') là phần đồ thị của (C) ứng với $x > a$
- (C_2') là phần đồ thị lấy đối xứng phần $x < a$ của đồ thị (C) qua trục **Ox**.

Hàm số $y = \frac{|U(x)|}{x-a}$ tương tự.

BÀI TẬP MẪU:

Bài 1.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+2}$

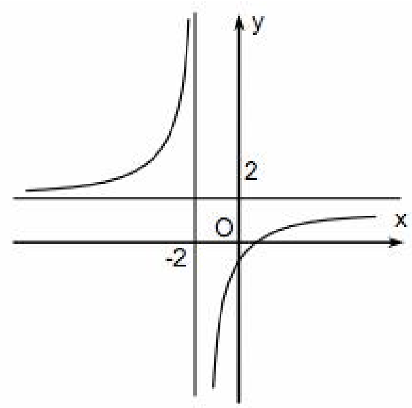
b) Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{|x+2|}$

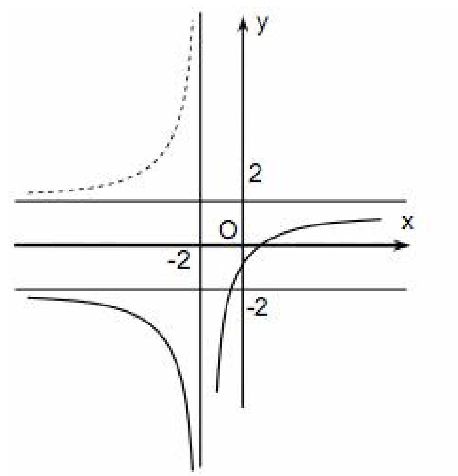
c) Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{|2x-1|}{x+2}$

Hướng dẫn:

a) Xem bài 2a) dạng 1

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	2 ↗	$+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	2





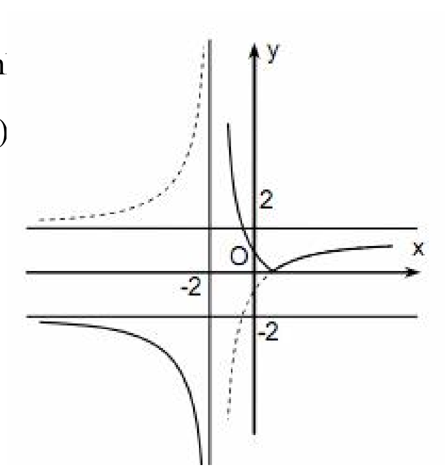
b) Ta có:

$$y=\frac{2x-1}{\left|x+2\right|}=\begin{cases}\dfrac{2x-1}{x+2} & khi\, x>-2\\ -\dfrac{2x-1}{x+2} & khi\, x\le -2\end{cases}$$

Đồ thị hàm số bao gồm:

- Giữ lại phần đồ thị y=f(x) ứng với hoàn
- Lấy đối xứng qua Ox phần đồ thị y=f(x)

  hoành độ x<-2



c) Ta có:

$$y=\frac{\left|2x-1\right|}{x+2}=\begin{cases}\dfrac{2x-1}{x+2} & khi\, x>\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{2x-1}{x+2} & khi\, x\le \dfrac{1}{2}\left(x\ne -2\right)\end{cases}$$

Đồ thị hàm số bao gồm:

Giữ lại phần đồ thị y=f(x) ứng với hoành độ $x\ge \frac{1}{2}$

Lấy đối xứng qua Ox phần đồ thị y=f(x) ứng với hoành độ $x < \frac{1}{2}$

DẠNG 3: Cho hàm số $y = f(x)$ (C) hãy vẽ đồ thị hàm số (C') : $y = f(|x|)$

PHƯƠNG PHÁP:

Nhận xét: $f(|-x|) = f(|x|) \Rightarrow$ hàm số $y = f(|x|)$ là hàm số chẵn

Ta có:

$$(C'): y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) = y \text{ nếu } x \geq 0 \ \ (1) \\ f(\text{-}x) \quad \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$$

Do đó đồ thị (C') gồm 2 phần:

- Phần 1: là phần đồ thị của (C):y=f(x) nằm phía bên phải Oy ($x \geq 0$) (do 1)
- Phần 2: là phần đồ thị lấy đối xứng phần 1 qua trục **Oy** vì hàm số chẵn

BÀI TẬP MẪU:

Bài 1.

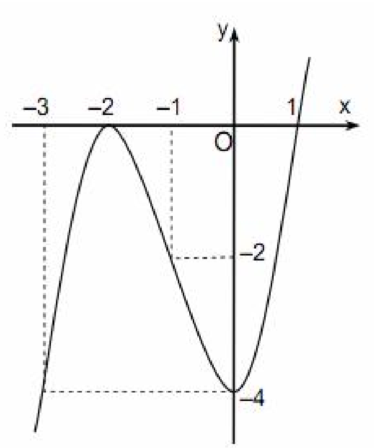
a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số sau: $y = x^3 + 3x^2 - 4$

b) Vẽ đồ thị hàm số $y = |x|^3 + 3x^2 - 4$

Hướng dẫn:

a) Bảng biến thiên và đồ thị:

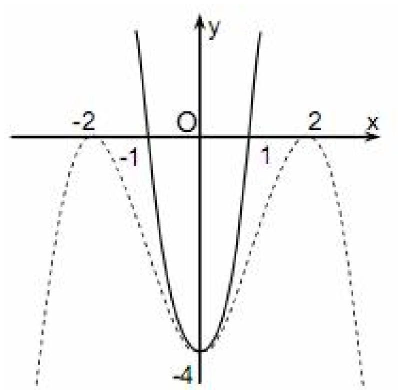
x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$



b) Ta có:

Do đó đồ thị (C') gồm 2 phần:

- Phần 1: là phần đồ thị của (C):y=f(x) nằm phía bên phải Oy ($x \geq 0$) (do 1)
- Phần 2: là phần đồ thị lấy đối xứng phần 1 qua trục **Oy** vì hàm số chẵn

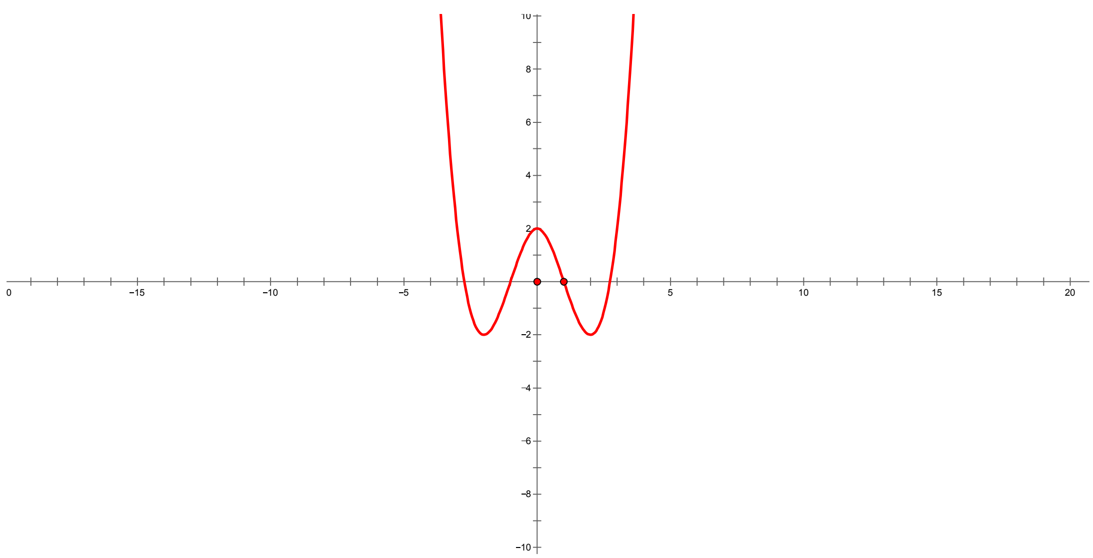


Bài tập 2: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số
2. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $\left|x^3\right| - 3x^2 = m$

Hướng dẫn:

Đồ thị hàm số $y = \left|x\right|^2 - 3\left|x\right|^2 + 2$



DẠNG 4: Cho hàm số $y = f(x)$ (C) hãy vẽ đồ thị hàm số (C') $|y| = f(x)$

PHƯƠNG PHÁP:

Nhận xét:

$Nếu\, M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow M(x_0; -y_0) \in (C')$ nên (C') nhận trục Ox làm trục đối xứng

Ta có: $|y| = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ y = \pm f(x) \end{cases}$

Suy ra: Đồ thị (C') gồm **2** phần:

- $\left(C_1'\right)$ là phần đồ thị của (C) ứng với $y \geq 0$
- $\left(C_2'\right)$ là phần đồ thị lấy đối xứng phần $\left(C_1'\right)$ qua trục **Ox**.

BÀI TẬP MẪU:

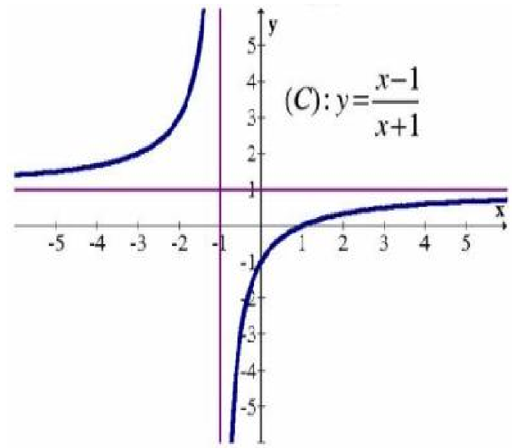
Bài 1.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm sau: $y = \dfrac{x-1}{x+1}$

b) Vẽ đồ thị hàm số : $|y| = \dfrac{x-1}{x+1}$

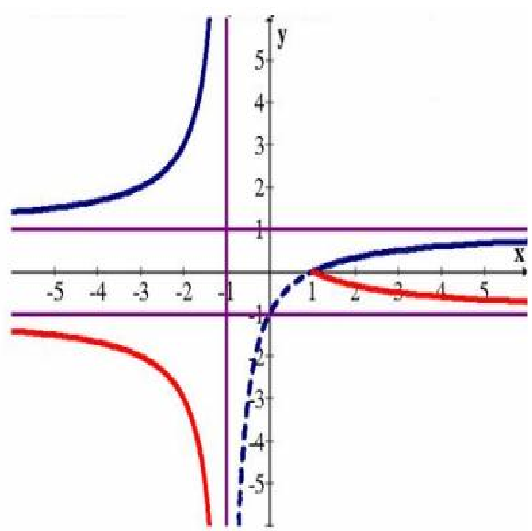
Hướng dẫn:

a) Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$



b) Đồ thị hàm số : $|y| = \dfrac{x-1}{x+1}$ bao gồm:

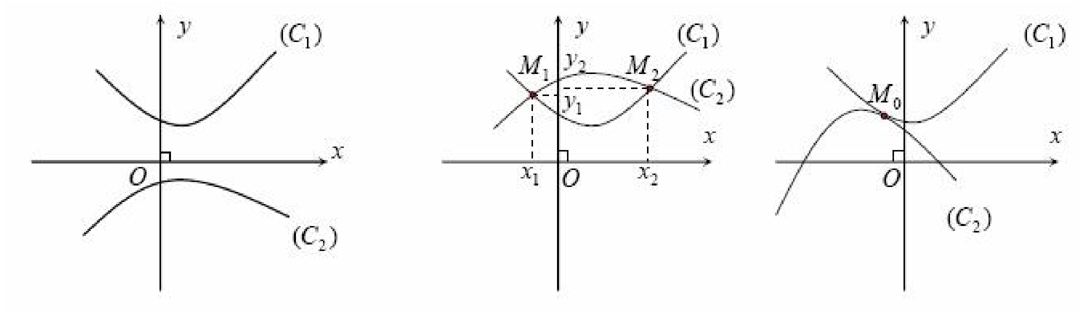
- Là phần đồ thị (C):y=f(x) phía trên Ox
- Lấy đối xứng phần đồ thị 1 qua Ox



Vấn đề 4: Sự tương giao của đồ thị

PHƯƠNG PHÁP:

Xét sự tương giao của hai đồ thị $(C): y = f(x)$ và $(C'): y = g(x)$



(C_1) và (C_2) không có điểm chung — (C_1) và (C_2) cắt nhau — (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau

- Lập phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $f(x) = g(x)$ (1)
- Số điểm chung của (C) và (C') bằng số nghiệm của (1)
  - Nếu phương trình (1) vô nghiệm thì hai đồ thị không có điểm chung
  - Nếu phương trình (1) có nghiệm kép thì hai đồ thị tiếp xúc nhau
  - Nếu phương trình (1) có bao nhiêu nghiệm thì hai đồ thị có bấy nhiêu điểm chung

✶ Chú ý:

Hàm bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0) \quad (1)$

Phương pháp đại số: ✪ Nếu (1) có 1 nghiệm là α thì:

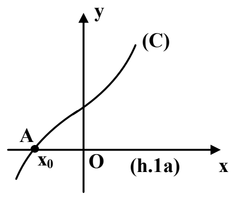
$$(1) \Leftrightarrow (x-\alpha)(Ax^2 + Bx + C) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha \\ Ax^2 + Bx + C = 0\ (2) \end{array}\right.$$

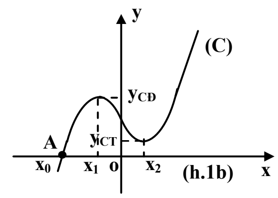
- Phương trình (1) có 1 nghiệm $\Rightarrow$ phương trình (2) có 1 nghiệm kép $x = \alpha$ hoặc (2) vô nghiệm
- Phương trình (1) có 2 nghiệm $\Rightarrow$ phương trình (2) có 1 nghiệm kép $x \neq \alpha$ hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x = \alpha$
- Phương trình (1) có 3 nghiệm $\Rightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác α

Phương pháp hàm số: ✪ Nếu không nhẩm được nghiệm

• ***Trường hợp 1***: *(1) chỉ có 1 nghiệm ⇔ (C) và Ox có 1 điểm chung*

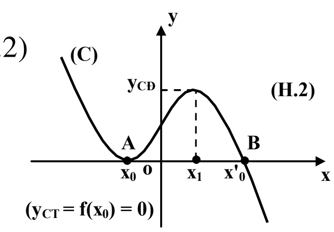
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f \text{ không có cực trị} & (h.1a) \\ \begin{cases} f \text{ có 2 cực trị} \\ y_{CĐ}.y_{CT} > 0 \end{cases} & (h.1b) \end{array}\right.$$





• ***Trường hợp 2***: *(1) có đúng 2 nghiệm*

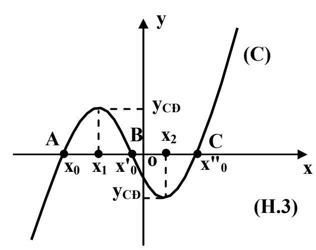
$$\Leftrightarrow (C) \text{ tiếp xúc với } Ox \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ có 2 cực trị} \\ y_{CĐ}.y_{CT} = 0 \end{cases} \quad (h.2)$$



• ***Trường hợp 3:*** *(1) có 3 nghiệm phân biệt*

⇔ (C) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ có 2 cực trị} \\ y_{CĐ}.y_{CT} < 0 \end{cases} \quad (h.3)$$

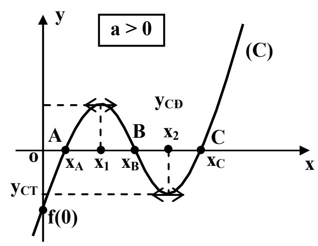


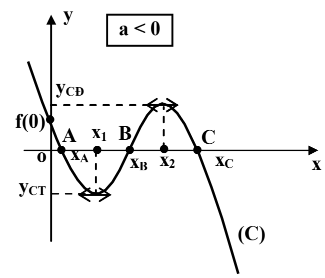
Dạng 2: Phương trình bậc ba có 3 nghiệm cùng dấu

• ***Trường hợp 1:*** *(1) có 3 nghiệm dương phân biệt*

⇔ (C) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ có 2 cực trị} \\ y_{CĐ}.y_{CT} < 0 \\ x_{CĐ} > 0,\ x_{CT} > 0 \\ a.f(0) < 0 \ (hay\ ad < 0) \end{cases}$$

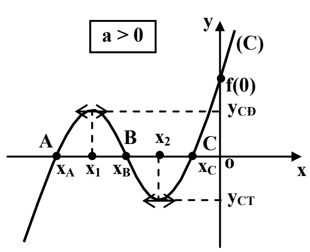


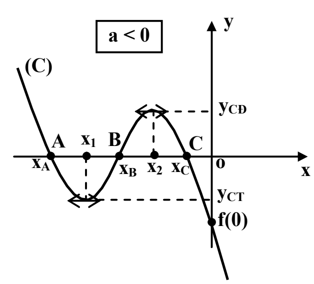


• ***Trường hợp 2:*** *(1) có 3 nghiệm có âm phân biệt*

⇔ (C) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ có 2 cực trị} \\ y_{CĐ}.y_{CT} < 0 \\ x_{CĐ} < 0,\ x_{CT} < 0 \\ a.f(0) > 0 \ (hay\ ad > 0) \end{cases}$$





Hàm trùng phương $ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (1)$

- Đặt $t = x^2 \quad (t \geq 0)$
- Khi đó $(1) \Leftrightarrow at^2 + bt + c = 0 \quad (2)$
    - Phương trình (1) vô nghiệm $\Rightarrow$ phương trình (2) vô nghiệm hoặc có nghiệm âm
    - Phương trình (1) có 1 nghiệm $\Rightarrow$ phương trình (2) có 1 nghiệm kép $x = 0$ hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm $x = 0$ và 1 nghiệm âm.
    - Phương trình (1) có 2 nghiệm $\Rightarrow$ phương trình (2) có 1 nghiệm kép $x > 0$ hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm $x > 0$ và 1 nghiệm âm.

- Phương trình (1) có 3 nghiệm $\Rightarrow$ phương trình (2) có 1 nghiệm đơn $x > 0$ và 1 nghiệm kép $x = 0$
- Phương trình (1) có 4 nghiệm $\Rightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm đơn $x > 0$.

✶ Hai đồ thị $(C): y = f(x)$ và $(C'): y = g(x)$ tiếp xúc nhau $\Leftrightarrow$ hệ phương trình $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm.

BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Bài 1. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x$ và đường thẳng $y = x + m$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt

Hướng dẫn: Lập phương trình hoành độ giao điểm $\Rightarrow m > -\frac{1}{4}$

Chú ý: Nếu phương trình hoành độ giao điểm có bậc lớn hơn hoặc bằng **2** thì cần biến đổi đưa về biện luận bậc 2 bằng cách nhẩm được 1 nghiệm. Cụ thể ta **xem bài 2** sau:

Bài 2. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 7x^2 + 6x$ và đường thẳng $y = -mx + m$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt

Hướng dẫn:

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 - 7x^2 + 6x = -mx + m$$
$$\Leftrightarrow x^3 - 7x^2 + (6 + m)x - m = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 6x + m) = 0$$
$$ĐS: \begin{cases} m < 9 \\ m \neq 5 \end{cases}$$

Chú ý: Nếu phương trình hoành độ giao điểm có bậc lớn hơ n hoặc bằng **3**, còn tham số m có bậc 2 thì ta thường coi nó như phương trình bậc hai của tham số để việc hạ bậc dễ dàng hơn. Ta xem bài sau:

Bài 3. Tìm m để đồ thị hàm số $y = mx^3 - (6 + m^2)x^2 + 15mx - 9m^2$ cắt Ox tại hai điểm phân biệt

Hướng dẫn:

Đồ thị hàm số cắt Ox tại 2 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow mx^3-\left(6+m^2\right)x^2+15mx-9m^2=0(*)$ có hai nghiệm phân biệt.

Nếu xem phương trình (*) là phương trình bậc 2 ẩn m.

$(*)\Leftrightarrow -\left(x^2+9\right)m^2+\left(x^3+15x\right)m-6x^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m_1=x \\ m_2=... \end{array}\right.$

Ta có:

$(*)\Leftrightarrow \left(x-m\right)\left(mx^2-6x+9m\right)=0.$

(*) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow mx^2-6x+9m=0$ (**) có đúng một nghiệm khác m hoặc có hai nghiệm trong đó có 1 nghiệm bằng m

⊕TH1: (**) có đúng một nghiệm khác m

▹Nếu m=0 $\Rightarrow x=0=m\Rightarrow$ Không thỏa mãn

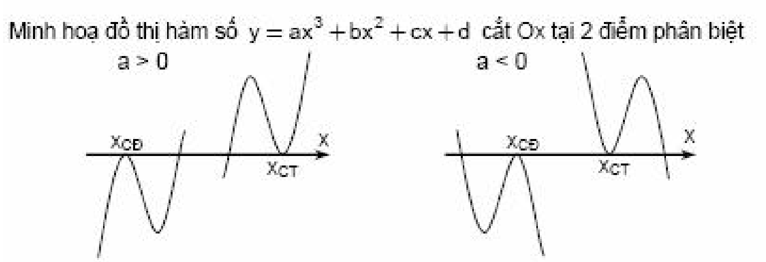
▹Nếu m $\neq 0\Rightarrow$ (**) là phương trình bậc hai

$\left(**\right)$ có đúng một nghiệm khác m $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=0 \\ m.m^2-6m+9m\neq 0 \end{cases}\Leftrightarrow m=\pm 1$

⊕TH2: (**) có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm bằng m

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta'>0 \\ m.m^2-6m+9m=0 \end{cases}$ vônghiệm

Vậy m=± 1 thì đồ thị cắt Ox tại hai điểm phân biệt



Chú ý: Trong trường hợp không tìm được nghiệm phương trình hoành độ giao điểm thì phương pháp hàm số vẫn là tối ưu hơn cả:

Bài 4. Tìm m để đồ thị hàm số $y=\frac{x^3}{3}-m\left(x+1\right)$ cắt Ox tại hai điểm phân biệt

Hướng dẫn:

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{x^3}{3} - m(x+1) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{x^3}{3(x+1)}, x \neq -1$

Số nghiệm là số giao điểm...

Xét hàm số: $y = \frac{x^3}{3(x+1)}, x \neq -1$

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		-1		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{9}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

Vậy, đồ thị hàm số cắt Ox tại hai điểm khi $m = \frac{9}{4}$

Chú ý:

- Từ bảng biến thiên ta còn biết được số nghiệm của (*) tuỳ theo m. Chẳng hạn (*) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > \frac{9}{4}$.
- Thực chất của bài toán BIỆN LUẬN SỐ NGHIỆM BẰNG ĐỒ THỊ chính là phương pháp hàm số. Dùng phương pháp đồ thị có hạn chế là phải vẽ đồ thị của hàm số, điều này mất nhiều thời gian hơn so với lập bảng biến thiên của hàm số.

Bài 5. Tìm m để đồ thị $(P): y = x^2$ cắt đường thẳng $d: y = mx + m + 3$ tại hai điểm A và B đối xứng nhau qua I(-1;3)

Hướng dẫn:

Phương trình hoành độ giao điểm:
$x^2 = mx + m + 3 \Leftrightarrow x^2 - mx - (m+3) = 0$. Để ý phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt vì $\Delta > 0, \forall m \in \mathbb{R}$
$A(x_1; mx_1 + m + 3); B(x_2; mx_2 + m + 3)$, I là trung điểm của AB.
Từ đó ta được m=-2

Bài 6. Tìm m để đường thẳng $(P): y = -x + m$ cắt đồ thị $y = \frac{x-1}{x+2}$ tại hai điểm A và B sao cho độ dài AB=5

Hướng dẫn:

Phương trình hoành độ giao điểm:

$\frac{x-1}{x+2}=-x+m \Leftrightarrow g(x)=x^2+\left(3-m\right)x-2m-1=0\ \left(x\neq -2\right)$ (1).

hai đồ thị cắt nhau tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiêm pb khác 2

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ g(-2)\neq 0\end{cases}$ luôn đúng

$A\left(x_1;-x_1+m\right);B\left(x_2;-x_2+m\right)$, $AB^2=25 \Leftrightarrow 2\left(x_1-x_2\right)^2=25 \Leftrightarrow m=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN:

Bài 1. Tìm m để đồ thị hàm số $y=\left(x-1\right)\left(x^2-2x+3m\right)$ cắt Ox tại 3 điểm phân biệt

Đáp số: $m<\frac{1}{3}$

Bài 2. Tìm m để đồ thị hàm số $y=mx^3+\left(3-4m\right)x-6$ cắt Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ khác $-\frac{1}{2}$

Đáp số: $\begin{cases}m>3\\ m\neq 4\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}m<0\\ m\neq -\frac{3}{8}\end{cases}$

Bài 3. Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^3-5mx^2+4m^2x$ và đường thẳng $y=-2mx+2m^2$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt.

Đáp số: $\begin{cases}m<0 \quad \text{hoặc m}>\frac{1}{2}\\ m\neq \frac{2}{3}\end{cases}$

Bài 4. Cho hàm số $y=\frac{x}{x-2}$

a) Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị với $(P): y=x^2-2x$

b) Tìm m để đường thẳng $y = m(x-2)$ cắt đồ thị hàm số tại hai điểm A,B và khoảng cách AB= $3\sqrt{2}$

Đáp số:

a) $A \equiv O(0;0)$; $B(1;1)$; $C(3;3)$

b) $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \dfrac{-9 \pm \sqrt{113}}{16} \end{array}\right.$

Bài 5. Tìm m để các phương trình sau chỉ có 1 nghiệm:

a) $2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx - 2 = 0$ b) $x^3 - 3x^2 + 3(1-m)x + 1 + 3m = 0$

c) $2x^3 - 3mx^2 + 6(m-1)x - 3m + 12 = 0$ d) $x^3 - 6x^2 - 3(m-4)x + 4m - 8 = 0$

e) $2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x + 2 - m = 0$ f) $x^3 - 3mx + 2m = 0$

Bài 6. Tìm m để các phương trình sau chỉ có 2 nghiệm:

a) $x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2m(2m-1) = 0$ b) $x^3 - 3mx + 2m = 0$

c) $x^3 - (2m+1)x^2 + (3m+1)x - (m+1) = 0$ d) $x^3 - 3x^2 + 3(1-m)x + 1 + 3m = 0$

Bài 7. Tìm m để các phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:

a) $x^3 - 3mx^2 + 3(m^2-1)x - (m^2-1) = 0$ b) $x^3 - 6x^2 - 3(m-4)x + 4m - 8 = 0$

c) $2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x + 2 - m = 0$ d) $\frac{1}{3}x^3 - x + m = 0$

Bài 8. Tìm m để các phương trình sau có 3 nghiệm dương phân biệt:

a) $x^3 - 3mx^2 + 3(m^2-1)x - (m^2-1) = 0$ b) $x^3 - 6x^2 - 3(m-4)x + 4m - 8 = 0$

c) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x + m + \frac{7}{6} = 0$ d) $x^3 - mx^2 + (2m+1)x - m - 2 = 0$

Hướng dẫn câu a), các câu khác làm tương tự:

Đặt $f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2-1)x - (m^2-1)$

$f'(x) = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$

Phương trình: $f'(x) = 0$ có $\Delta' = 9 > 0$ với mọi m, có 2 nghiệm

$x_1 = m + 1$
$x_2 = m - 1$

$f''(x) = 6x - 6m$

$x_{cd} = x_2 = m - 1$; $f(x_{cd}) = (m - 1)(m^2 - 3)$

$x_{ct} = x_1 = m + 1$; $f(x_{ct}) = (m + 1)(m^2 - 2m - 1)$

Để phương trình có 3 nghiệm dương phân biệt thì ta phải có điều kiện

$$\begin{cases} f(x_{cd}) > 0 \\ f(x_{ct}) < 0 \\ x_{cd} > 0 \\ f(0) < 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \sqrt{3} < m < 1 + \sqrt{2}$.

Bài 9. Tìm m để các phương trình sau có 3 nghiệm âm phân biệt:

a) $2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x + 2 - m = 0$ b) $x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - (m^2 - 1) = 0$

c) $x^3 + 3x^2 - 9x + m = 0$ d) $x^3 - x^2 + 18mx - 2m = 0$

Vấn đề 5: Điểm đặc biệt trên đồ thị hàm số

DẠNG 1: Tìm điểm trên đồ thị (C): y=f(x) có tọa độ nguyên

Phương Pháp:

Tìm các điểm trên đồ thị hàm số hữu tỉ $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *có toạ độ là những số nguyên:*

- *Phân tích* $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *thành dạng* $y=A(x)+\dfrac{a}{Q(x)}$, *với A(x) là đa thức, a là số nguyên.*
- *Khi đó* $\begin{cases} x\in\mathbb{Z} \\ y\in\mathbb{Z}\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ *Q(x) là ước số của a. Từ đó ta tìm các giá trị x nguyên để Q(x) là ước số của a.*
- *Thử lại các giá trị tìm được và kết luận.*

BÀI TẬP:

Bài 1. Tìm các điểm trên đồ thị (C) của hàm số có toạ độ nguyên:

a) $y=\dfrac{x+2}{x+1}$ b) $y=\dfrac{x-10}{x+2}$ c) $y=\dfrac{x+2}{x-2}$

d) $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+2}$ e) $y=\dfrac{x^2+2x}{x+1}$ f) $y=x+1+\dfrac{4}{x-1}$

Bài 2. Tìm các điểm trên đồ thị (C) của hàm số có toạ độ nguyên:

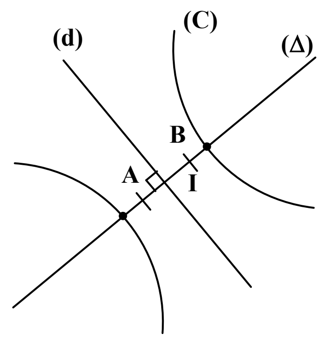
a) $y=x+\sqrt{y^2+2(x+1)y+4x}$ b) $y=2x+\sqrt{y^2+4(x-1)y+6x}$

DẠNG 2: Tìm cặp điểm trên đồ thị *(C):y=f(x)* đối xứng qua đường thẳng *y=ax+b*

Cơ sở của phương pháp: *A, B đối xứng nhau qua d ⇔ d là trung trực của đoạn AB*

- *Phương trình đường thẳng Δ vuông góc với d: y = ax = b có dạng:*

$$\Delta:\ y = -\frac{1}{a}x + m$$



- *Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (C):*

$$f(x) = -\frac{1}{a}x + m \qquad (1)$$

- *Tìm điều kiện của m để Δ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B. Khi đó x_A, x_B là các nghiệm của (1).*
- *Tìm toạ độ trung điểm I của AB.*
- *Từ điều kiện: A, B đối xứng qua d ⇔ I ∈ d, ta tìm được m ⇒ x_A, x_B ⇒ y_A, y_B ⇒ A, B.*

Chú ý:

- *A, B đối xứng nhau qua trục hoành* $\Leftrightarrow \begin{cases} x_A = x_B \\ y_A = -y_B \end{cases}$
- *A, B đối xứng nhau qua trục tung* $\Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -x_B \\ y_A = y_B \end{cases}$
- *A, B đối xứng nhau qua đường thẳng y = b* $\Leftrightarrow \begin{cases} x_A = x_B \\ y_A + y_B = 2b \end{cases}$
- *A, B đối xứng nhau qua đường thẳng x = a* $\Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B = 2a \\ y_A = y_B \end{cases}$

BÀI TẬP:

Bài 1. Tìm trên đồ thị (C) của hàm số hai điểm đối xứng nhau qua đ ường thẳng d:

a) $(C): y = x^3 + x;\qquad d: x + 2y = 0$

b) $(C): y = \dfrac{x+4}{x-2}$; $\quad d: x - 2y - 6 = 0$

c) $(C): y = \dfrac{x^2}{x-1}$; $\quad d: y = x - 1$

d) $(C): y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x-1}$; $\quad d: y = x - 1$

Bài 2. Cho đồ thị (C) và đường thẳng d. Viết phương trình đồ thị (C ′) đối xứng với (C) qua đường thẳng d:

a) $(C): y = 3x^3 - 5x^2 + 10x - 2$; $\quad d: x = -2$

b) $(C): y = \dfrac{2x^2 - 3x + 7}{x-1}$; $d: x = 2$

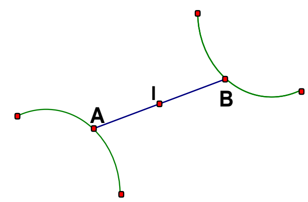
c) $(C): y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x-2}$; $\quad d: y = 2$

d) $(C): y = \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{x-1}$; $d: y = -1$

Bài 3. Tìm m để trên đồ thị $(C): y = mx^3 + 3x^2 + 2x + m^2$ có một cặp điểm đối xứng nhau qua trục Ox

DẠNG 3: Tìm cặp điểm trên đồ thị (C):y=f(x) đối xứng qua điểm I(a;b)

Cơ sở của phương pháp: *A, B đối xứng nhau qua I $\Leftrightarrow$ I là trung điểm của AB.*



- *Phương trình đường thẳng d qua I(a; b),*

có hệ số góc k có dạng: $y = k(x-a)+b$.

- *Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d:*

$$f(x) = k(x-a)+b \quad (1)$$

- *Tìm điều kiện để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt*

A, B. khi đó x_A, x_B là 2 nghiệm của (1).

- *Từ điều kiện: A, B đối xứng qua I $\Leftrightarrow$ I là trung điểm của AB, ta tìm được k $\Rightarrow$ x_A, x_B.*

Chú ý: *A, B đối xứng qua gốc toạ độ O* $\Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -x_B \\ y_A = -y_B \end{cases}$

BÀI TẬP

Bài 1. Tìm trên đồ thị (C) của hàm số hai điểm đối xứng nhau qua điểm I:

a) $(C): y = x^3 - 4x^2 + x + 2; \quad I(2;4)$ b) $(C): y = \dfrac{x^2+x+2}{x-1}; \quad I\left(0;\dfrac{5}{2}\right)$

c) $(C): y = x^3 - 3x^2 - 2x + 1; \quad I \equiv O(0;0)$ d) $(C): y = \dfrac{x+4}{x+1}; \quad I \equiv O(0;0)$

e) $(C): y = \dfrac{3x+4}{2x-1}; \quad I(1;1)$ e) $(C): y = \dfrac{2x^2-5x+1}{x+1}; \; I(-2;-5)$

Bài 2. Cho đồ thị (C) và điểm I. Viết phương trình đồ thị (C′) đối xứng với (C) qua điểm I:

a) $(C): y = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 1; \quad I(1;2)$ b) $(C): y = \dfrac{(x-1)^2}{x-2}; \quad I(1;1)$

c) $(C): y = \dfrac{x^2-x+1}{x-1}; \quad I(2;1)$ d) $(C): y = \dfrac{x^3-2x^2-5x+1}{2x-3}; \quad I(2;1)$

Vấn đề 6 : Họ đường cong

BÀI TOÁN TỔNG QUÁT:

Cho họ đường cong $(C_m): y = f(x,m)$ (m là tham số)

Biện luận theo m số đường cong của họ (C_m) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0)$ cho trước.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI:

Ta có :

Họ đường cong (C_m) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0)$ $\Leftrightarrow$ $y_0 = f(x_0,m)$ (1)

Xem (1) là phương trình theo ẩn m.

Tùy theo số nghiệm của phương trình (1) ta suy ra số đường cong của họ (Cm) đi qua M_0

Cụ thể:

- Nếu phương trình (1) có n nghiệm phân biệt thì có n đường cong của họ (Cm) đi qua M_0
- Nếu phương trình (1) vô nghiệm thì mọi đường cong của họ (Cm) đều không đi qua M_0
- Nếu phương trình (1) nghiệm đúng với mọi m thì mọi đường cong của họ (Cm) đều đi qua M_0

Trong trường hợp này ta nói rằng M_0 là điểm cố định của họ đường cong (C_m)

DẠNG 1: TÌM ĐIỂM CỐ ĐỊNH CỦA HỌ ĐƯỜNG CONG

BÀI TOÁN TỔNG QUÁT:

Cho họ đường cong $(C_m): y = f(x,m)$ (m là tham số)

Tìm điểm cố định của họ đường cong (C_m)

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

CÁCH 1:

Bước 1: Gọi $M_0(x_0;y_0)$ là điểm cố định (nếu có) mà họ (C_m) đi qua. Khi đó phương trình:

$$y_0 = f(x_0,m) \text{ nghiệm đúng } \forall m \qquad (1)$$

Bước 2: Biến đổi phương trình (1) về một trong các dạng sau:

Dạng 1: $Am + B = 0 \ \forall m$

Dạng 2: $Am^2 + Bm + C = 0 \ \forall m$

Áp dụng định lý: $Am + B = 0 \ \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$ (2)

$$Am^2 + Bm + C = 0 \quad \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Bước 3: Giải hệ (2) hoặc (3) ta sẽ tìm được $(x_0;y_0)$

CÁCH 2:

• *Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định (nếu có) của họ (C_m).*

$$M(x_0; y_0) \in (C_m),\ \forall m \quad \Leftrightarrow \quad y_0 = f(x_0, m),\ \forall m \qquad (1)$$

• *Đặt $F(m) = f(x_0, m)$ thì $F(m) = y_0$ không đổi.*

$\Rightarrow F'(m) = 0$ *(3)*

• *Giải (3) tìm được x_0. Thay x_0 vào (1) tìm được y_0. Từ đósuy ra được các điểm cố định.*

BÀI TẬP MẪU:

Bài 1. Cho họ (C_m) $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 2(m^2+4m+1)x - 4m(m+1)$. CMR: Khi m thay đổi thì họ đường cong luôn qua một điểm cố định.

Bài 2. Cho họ đồ thị (C_m): $= \dfrac{mx+1}{x+m}$. Tìm các điểm cố định mà đồ thị của hàm số luôn đi qua với mọi $m \neq \pm 1$

Bài 3. Cho họ (C_m) có phương trình: $y = \dfrac{x^2+mx-m-1}{x+1}$. Chứng minh rằng ($C_m$) luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 4. Cho hàm số (C_m): $y = x^3 - 3mx + 2m$

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với m = 1.

b. Chứng minh rằng họ đường cong luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 5. Cho hàm số: $y = \dfrac{mx-1}{x-m}$, $m \neq \pm 1$. Gọi (H_m) là đồ thị của hàm số đã cho.

a. Chứng minh rằng với mọi $m \neq \pm 1$, họ đường cong luôn qua 2 điểm cố định.

b. Gọi M là giao điểm của 2 tiệm cận. Tìm tập hợp các điểm M khi m thay đổi.

BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Bài 1. Tìm các điểm cố định của họ đồ thị (C_m) có phương trình sau:

a) $y = (m-1)x - 2m + 1$

b) $y = mx^2 + 2(m-2)x - 3m + 1$

c) $y = (m+1)x^3 - 2mx^2 - (m-2)x + 2m + 1$

d) $y = (1-2m)x^2 - (3m-1)x + 5m - 2$

e) $y = x^3 + mx^2 - 9x - 9m$

f) $y = (m-2)x^3 - mx + 2$

g) $y = 2mx^4 - x^2 - 4m + 1$

h) $y = x^4 + mx^2 - m - 5$

i) $y = \dfrac{(m-1)x-2}{x-m}$ $(m \neq -1, m \neq -2)$

k) $y = \dfrac{x+3m-1}{(m+2)x+4m}$

l) $y=\dfrac{x^2-5mx+7}{mx-2}\left(m\neq\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ m) $y=\dfrac{-2x^2+(m+2)x+m}{2x-m}\ (m\neq 0)$

Bài 2. Chứng minh rằng họ đồ thị (C_m) có 3 điểm cố định thẳng hàng. Viết phương trình đường thẳng đi qua 3 điểm cố định đó:

a) $y=(m+3)x^3-3(m+3)x^2-(6m+1)x+m+1$

b) $y=(m+2)x^3-3(m+2)x^2-4x+2m-1$

c) $y=(m-4)x^3-(6m-24)x^2-12mx+7m-18$

d) $y=(m+1)x^3-(2m+1)x-m+1$

Bài 3. Cho hàm số: $y=(m+2)x^3+2(m+2)x^2-(m+3)x-2m+1$ (C_m). Chứng minh rằng họ đồ thị luôn qua ba điểm cố định và 3 điểm cố định đó cùng nằm trên một đường thẳng.

DẠNG 2: TÌM ĐIỂM HỌ ĐỒ THỊ HÀM SỐ KHÔNG ĐI QUA

Phương pháp:

• *Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm mà không có đồ thị nào của họ (C_m) đi qua.*

$$M(x_0; y_0) \notin (C_m),\ \forall m \quad \Leftrightarrow \quad y_0 = f(x_0, m) \text{ vô nghiệm } m \quad (1)$$

• *Biến đổi (1) về một trong các dạng sau:*

• *Dạng 1: (1) $\Leftrightarrow Am + B = 0$ vô nghiệm m* $\Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B \neq 0 \end{cases}$ *(2a)*

• *Dạng 2: (1)* $\Leftrightarrow Am^2 + Bm + C = 0$ *vô nghiệm m* $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A = B = 0 \\ C \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} A \neq 0 \\ B^2 - 4AC < 0 \end{cases} \end{array}\right.$ *(2b)*

Chú ý: • *Kết quả là một tập hợp điểm.*

• *Những điểm nằm trên tiệm cận đứng cố định của hàm hữu tỷ là những điểm đồ thị không đi qua.*

BÀI TẬP MẪU:

Bài 1. Cho hàm số $y = (x-2)(x^2 - 2mx + m^2 - 1)$ (C_m). Tìm các điểm mà (C_m) không thể đi qua.

Bài 2. Cho hàm số $y = \dfrac{(3m+1)x - m^2 + m}{x + m}$

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với m = 1.

b. Tìm các điểm trên đường thẳng x = 1, sao cho không thể có giá trị nào của m để đồ thị hàm số đi qua.

Bài 3. Cho đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3(m+3)x^2 + 18mx - 8$ (C_m). Chứng minh rằng trên đường cong $y = x^2$ có hai điểm mà (C_m) không đi qua với mọi m.

BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Bài 1. Tìm các điểm trong mặt phẳng mà không có đồ thị nào của họ (C_m) đi qua:

a) $y=(m+2)x+m^2+2m$

b) $y=\dfrac{m+1}{m^2+m+1}x+\dfrac{m^2}{m^2+m+1}$

c) $y=mx^2+2(1-m)x+1+m\ (m\neq 0)$

d) $y=x^2-m^3x+m^2-2$

e) $y=2x^3+3mx^2-m^3-5m^2-4$

f) $y=mx^3-m^2x^2-4mx+4m^2-6$

g) $y=\dfrac{(m-2)x-m^2+2m-4}{x-m}$

h) $y=\dfrac{(3m+1)x-m^2+m}{x+m}$

i) $y=\dfrac{x^2+mx+8-m}{x-1}$

k) $y=\dfrac{x^2-2mx+m+2}{x-m}$

l) $y=\dfrac{x^2+mx-2m+4}{x^2+2x+5}$

m) $y=\dfrac{x^2+(3m-1)x-10}{x^2-3x+2}$

Bài 2. Tìm các điểm thuộc (L) mà không có đồ thị nào của họ (C_m) đi qua:

a) (C_m): $y=mx^3-m^2x^2-4mx+4m^2-6$; (L) là trục hoành.

b) (C_m): $y=2x^3-3(m+3)x^2+18mx+6$; (L): $y=x^2+14$.

c) (C_m): $y=\dfrac{x^2-mx+m^2-m+1}{mx+m^2+m+1}$; (L) là trục tung.

d) (C_m): $y=\dfrac{(m+1)x^2+m^2x+1}{x+m}$; (L): x = 2.

e) (C_m): $y=\dfrac{m^2x^2+1}{x}$; (L): y = 1.

DẠNG 3: TÌM ĐIỂM MÀ MỘT SỐ ĐỒ THỊ CỦA HỌ ĐÒ THỊ (Cm):y=f(x,m) ĐI QUA

PHƯƠNG PHÁP:

- *Ta có:* $M(x_0; y_0) \in (C_m) \quad \Leftrightarrow \quad y_0 = f(x_0, m) \qquad (1)$
- *Biến đổi (1) về một trong các dạng sau:*

$$Am + B = 0 \ (2a) \qquad \text{hoặc} \qquad Am^2 + Bm + C = 0 \quad (2b)$$

- *Số nghiệm của (2a) hoặc (2b) theo m = Số (C_m) đi qua M.*

BÀI TẬP:

Bài 1. Tìm các điểm trong mặt phẳng sao cho có đúng k đồ thị của họ (C_m) đi qua:

a) (C_m): $y = \dfrac{2mx + m^2 + 2m}{2(x+m)}$; k = 1. b) ($C_m$): $y = \dfrac{-x^2 + mx - m^2}{x - m}$; k = 2.

c) (C_m): $xy - 2my - 2mx + m^2x - 4m = 0$; k = 1.

Bài 2. Tìm các điểm thuộc (L) sao cho có đúng k đồ thị của họ (C_m) đi qua:

a) (C_m): $y = x^3 + (m^2+1)x^2 - 4m$; (L): x = 2; k = 1.

b) (C_m): $y = x^3 + (m^2+1)x^2 - 4m$; (L): x = 2; k = 2.

c) (C_m): $y = x^3 + (m^2+1)x^2 - 4m$; (L): x = 2; k = 3.

Bài 3. Chứng minh rằng các điểm thuộc (L) có đúng k đồ thị của họ (C_m) đi qua:

a) (C_m): $y = \dfrac{mx^2 - (m^2+m-1)x + m^2 - m + 2}{x - m}$; (L): x > 1; k = 2.

b) (C_m): $y = \dfrac{(m+1)x^2 - m^2}{x - m}$; (L): x > 0; k = 2.

c) (C_m): $y = x^4 - 2mx^2 + m^2 + 1$; (L): y = 1; k = 1.

d) (C_m): $y = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^3 - 3m + 2)x + 2m(2m-1)$; (L): x = 1, y > –2; k = 2.

Vấn đề 7: *TÂM ĐỐI XỨNG-TRỤC ĐỐI XỨNG*

(CHỦ ĐỀ THẢO LUẬN)

LÝ THUYẾT:

✶ ***Tâm đối xứng***

Chứng minh $I(x_0, y_0)$ *là tâm đối xứng của đồ thị hàm số* $y = f(x)$

Đặt $\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$ thế vào hàm số ban đầu $y = f(x)$ ta được hàm số mới $Y = G(X)$

Chứng minh hàm số $Y = G(X)$ là hàm số lẻ, tức là chứng minh $G(-X) = -G(X)$

Chú ý:

- Cặp điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ có tọa độ là $M_1(x_0, y_0), M_2(-x_0, -y_0)$
- Cặp điểm đối xứng nhau qua trục hoành có tọa độ là $M_1(x_0, y_0), M_2(x_0, -y_0)$
- Cặp điểm đối xứng nhau qua trục tung có tọa độ là $M_1(x_0, y_0), M_2(-x_0, y_0)$

✶ ***Trục đối xứng***

a. *Chứng minh đường thẳng* $x = x_0$ *là trục đối xứng của đồ thị hàm số* $y = f(x)$

Đặt $\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y \end{cases}$ thế vào hàm số ban đầu ta được hàm số mới $Y = G(X)$

Chứng minh hàm số $Y = G(X)$ là hàm số chẵn, tức là chứng minh $G(-X) = G(X)$

b. *Chứng minh đường thẳng* $(d): y = ax + b$ *là trục đối xứng của đồ thị hàm số* $y = f(x)$

- Gọi d' là đường thẳng vuông góc với d suy ra $(d'): y = -\frac{1}{a}x + b'$
- Lập phương trình hoành độ giao điểm của d' và đồ thị
- Gọi A, B là giao điểm của d' và đồ thị, I là trung điểm của AB

  $\Rightarrow x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}$
- Gọi I' là giao điểm của d và d' $\Rightarrow x_{I'}$

- Chứng minh $x_I = x_{I'} \Rightarrow I \equiv I' \Rightarrow d$ là trục đối xứng của đồ thị hàm số.

BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Bài 1. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ (C)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

b. Tìm toạ độ 2 điểm A, B ở trên (C) và đối xứn g nhau qua đường thẳng x – y +4 = 0

Bài 2. Cho hàm số: $y = x^3 - mx^2 + 1 \left(C_m\right)$

1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số Khi m = 3
2. Tìm trên đồ thị hàm số tất cả các cặp điểm đối xứng nhau qua gốc toạ độ
3. Xác định m để đường cong (C_m) tiếp xúc với đường thẳng (D) có phương trình y= 5 .Khi đó , tìm giao điểm còn lại của (D) với (C_m)

Bài 3. Cho hàm số: $y = x^3 - 3x^2 + m$ (1)

1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số với m = 1
2. Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số (1) có 2 điểm phân biệt đối xứng qua gốc toạ độ

Bài 4. Cho hàm số: $y = \dfrac{2x^2 + \left(m - 2\right)x}{x - 1}$(1) với k là hàm số

1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số với m=-1
2. Với giá trị nào của m thì hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực đại, cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng x+4y-13=0

Bài 5. Cho hàm số $y = mx^3 + \left(2 - 4m\right)x + 3$ có đồ thị là (C_m)

1. Tìm những điểm cố định của (C_m)
2. Tìm m sao cho đồ thị của hàm số có hai điểm đối xứng qua trục Oy.

Vấn đề 8: KHOẢNG CÁCH

A. LÝ THUYẾT

- *Khoảng cách giữa hai điểm A, B:* $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- *Khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0)$ đến đường thẳng Δ: $ax + by + c = 0$:*

$$d(M, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- Khoảng cách từ $M(x_0; y_0)$ đến tiệm cận đứng : $x = a$ là $h = |x_0 - a|$
- Khoảng cách từ $M(x_0; y_0)$ đến tiệm cận ngang : $y = b$ là : $h = |y_0 - b|$
- *Diện tích tam giác ABC:*

$$S = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$$

- Để tìm khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ nào đó sao cho khoảng cách đó ngắn nhất ta thường áp dụng bất đẳng thức Cauchy nhiều lần. Và để khoảng cách ngắn nhất thì dấu “ =” xảy ra ở những số mà ta áp dụng bất đẳng thức Cauchy.

★ *Đối với bài toán tìm 2 điểm A, B thuộc 2 nhánh phân biệt của đồ thị sao cho AB ngắn nhất của hàm $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$ ta thường làm như sau:*

- Chia đa thức tìm phần nguyên và phần dư.
- Gọi 2 điểm A, B sao cho phù hợp
  - Nếu A ở nhánh bên phải thì ta nên gọi A có giá trị hoành độ là $x = TCĐ + a$ sau đó suy ra y , điều kiện $(a > 0)$
  - Nếu B ở nhánh bên trái thì ta nên gọi B có giá trị hoành độ là $x = TCĐ - b$ sau đó suy ra y , điều kiện $(b > 0)$
- Sau đó tính AB và áp dụng bất đẳng thức Cauchy nhiều lần như ở trên.

B. CÁC BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP

BÀI TOÁN 1: ĐỐI VỚI HÀM PHÂN THỨC HỮU TỶ

DẠNG 1. Cho hàm số y=f(x) có đồ thị (C) . Hãy tìm trên (C) hai điểm A và B sao cho khoảng cách AB ngắn nhất .

CÁCH GIẢI

- Giả sử (C) có tiệm cận đứng : x=a . Do tính chất của hàm phân thức , đồ thị nằm về hai phía của tiệm cận đứng . Cho nên gọi hai số α,β là hai số dương

- Nếu A thuộc nhánh trái $x_A < a \Rightarrow x_A = a-\alpha < a \in (C)$, và

- B thuộc nhánh phải $x_B > a \Rightarrow x_B = a+\beta > a \in (C)$

- Tính : $y_A = f(x_A); y_B = f(x_B)$; Sau đó tính

$$AB^2 = \left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 = \left[\left(b+\beta\right)-\left(a-\alpha\right)\right]^2 + \left(y_B - y_A\right)^2$$

- Khi đó AB có dạng : $AB^2 = g\left[\left(a+b\right);\alpha+\beta;\alpha.\beta\right]$. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si , ta có kết quả cần tìm .

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. (ĐH-NGoại Thương -99). Cho hàm số $y = \dfrac{x^2-x+1}{x-1} = x + \dfrac{1}{x-1}\left(C\right)$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C)

b. Tìm trên (C) hai điểm A,B thuộc hai nhánh khác nhau , sao cho AB ngắn nhất .

GIẢI

a. Học sinh tự vẽ đồ thị (C)

b. Gọi A thuộc nhánh trái $x_A < 1 \Rightarrow$ với số $\alpha > 0$, đặt

$$x_A = 1-\alpha < 1 \Leftrightarrow y_A = x_A + \frac{1}{x_A - 1} = 1-\alpha + \frac{1}{1-\alpha-1} = 1-\alpha-\frac{1}{\alpha} \quad (1)$$

- Tương tự B thuộc nhánh phải $x_B > 1 \Rightarrow$ với số β>0 , đặt :

$$x_B = 1+\beta; \Rightarrow y_B = x_B + \frac{1}{x_B - 1} = 1+\beta + \frac{1}{1+\beta-1} = 1+\beta+\frac{1}{\beta} \quad (2)$$

$$AB^2=\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2=\left[(1+\beta)-(1-\alpha)\right]^2+\left[\left(1+\beta+\frac{1}{\beta}\right)-\left(1-\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\right]^2$$

$$g(\alpha;\beta)=\left(\alpha+\beta\right)^2+\left(\alpha+\beta+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)^2=\left(\alpha+\beta\right)^2+\left(\alpha+\beta\right)^2\left(1+\frac{1}{\alpha\beta}\right)^2$$

$$=\left(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\right)\left(1+1+\frac{2}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\right)$$

$$g(\alpha;\beta)\ge\left(2\alpha\beta+2\alpha\beta\right)\left(1+1+\frac{2}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\right)=8\alpha\beta+\frac{4}{\alpha\beta}+8\ge 8+2\sqrt{4.8}=8+8\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow AB\ge\sqrt{8+8\sqrt{2}}$$

- Dấu đẳng thức xảy ra khi :

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\beta\\ 8\alpha\beta=\dfrac{4}{\alpha\beta}\end{cases};\begin{cases}\alpha=\beta\\ \left(\alpha\beta\right)^2=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\alpha=\beta=\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

- Do đó ta tìm được hai điểm : $A\left(1-\frac{1}{\sqrt[4]{2}};1-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}-\sqrt[4]{2}\right);B\left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}};1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}+\sqrt[4]{2}\right)$

Bài 2.(ĐH-GTVT-98). Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x-2}=x+5+\dfrac{13}{x-2}\quad(C)$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C)

b. Tìm trên (C) hai điểm A,B thuộc hai nhánh khác nhau sao cho AB ngắn nhất .

GIẢI

a. Học sinh tự vẽ đồ thị (C)

b. Gọi A thuộc nhánh trái $x_A<2\Rightarrow$ với số $\alpha>0$, đặt

$$x_A=2-\alpha<2\Leftrightarrow y_A=x_A+5+\frac{13}{x_A-2}=7-\alpha+\frac{13}{2-\alpha-2}=7-\alpha-\frac{13}{\alpha}\quad(1)$$

- Tương tự B thuộc nhánh phải $x_B>2\Rightarrow$ với số β>0 , đặt :

$$x_B=2+\beta;\Rightarrow y_B=x_B+5+\frac{13}{x_B-2}=2+\beta+5+\frac{1}{2+\beta-2}=7+\beta+\frac{13}{\beta}\quad(2)$$

$$AB^2=\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2=\left[\left(2+\beta\right)-\left(2-\alpha\right)\right]^2+\left[\left(7+\beta+\frac{13}{\beta}\right)-\left(7-\alpha-\frac{13}{\alpha}\right)\right]^2$$

$$g(\alpha;\beta)=\left(\alpha+\beta\right)^2+\left(\alpha+\beta+\frac{13}{\alpha}+\frac{13}{\beta}\right)^2=\left(\alpha+\beta\right)^2+\left(\alpha+\beta\right)^2\left(1+\frac{13}{\alpha\beta}\right)^2$$

- Vậy $\quad =\left(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\right)\left(1+1+\frac{26}{\alpha\beta}+\frac{169}{\alpha^2\beta^2}\right)$

$$g(\alpha;\beta)\ge\left(2\alpha\beta+2\alpha\beta\right)\left(1+1+\frac{26}{\alpha\beta}+\frac{169}{\alpha^2\beta^2}\right)=8\alpha\beta+\frac{52^2}{\alpha\beta}+104\ge104+104\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow AB\ge\sqrt{104+104\sqrt{2}}=2\sqrt{26+26\sqrt{2}}$$

-Dấu đẳng thức xảy ra khi :

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\beta\\ 8\alpha\beta=\dfrac{52^2}{\alpha\beta}\end{cases};\begin{cases}\alpha=\beta\\ \left(\alpha\beta\right)^2=338\end{cases}\Rightarrow\alpha=\beta=\pm\frac{1}{\sqrt{338}}$$

- Do đó ta tìm được hai điểm :

$$A\left(2-\sqrt{338};7-\sqrt{338}-\frac{13}{\sqrt{338}}\right);B\left(2+\sqrt{338};7+\sqrt{338}+\frac{13}{\sqrt{338}}\right)$$

Bài 3. (ĐH-SPTPHCM-2000). Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+1}=x+2+\dfrac{1}{x+1}\quad\left(C\right)$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C)

b. Tìm trên (C) hai điểm A,B thuộc hai nhánh khác nhau sao cho AB ngắn nhất .

GIẢI

a. Học sinh tự vẽ đồ thị (C)

b. Gọi A thuộc nhánh trái $x_A<-1\Rightarrow$ với số $\alpha>0$, đặt

$$x_A=1-\alpha<1\Leftrightarrow y_A=x_A+2+\frac{1}{x_A+1}=-1-\alpha+2+\frac{1}{-1-\alpha+1}=1-\alpha-\frac{1}{\alpha}\quad(1)$$

- Tương tự B thuộc nhánh phải $x_B>-1\Rightarrow$ với số $\beta>0$, đặt :

$$x_B=1+\beta;\Rightarrow y_B=x_B+2+\frac{1}{x_B-1}=-1+\beta+2+\frac{1}{-1+\beta+1}=1+\beta+\frac{1}{\beta}\quad(2)$$

- Vậy

$$AB^2=\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2=\left[\left(-1+\beta\right)-\left(-1-\alpha\right)\right]^2+\left[\left(1+\beta+\frac{1}{\beta}\right)-\left(1-\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\right]^2$$

$$g(\alpha;\beta)=\left(\alpha+\beta\right)^2+\left(\alpha+\beta+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)^2=\left(\alpha+\beta\right)^2+\left(\alpha+\beta\right)^2\left(1+\frac{1}{\alpha\beta}\right)^2$$

$$=\left(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\right)\left(1+1+\frac{2}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\right)$$

$$g(\alpha;\beta)\ge\left(2\alpha\beta+2\alpha\beta\right)\left(1+1+\frac{2}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\right)=8\alpha\beta+\frac{4}{\alpha\beta}+8\ge 8+2\sqrt{4.8}=8+8\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow AB\ge\sqrt{8+8\sqrt{2}}$$

- Dấu đẳng thức xảy ra khi :

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\beta\\ 8\alpha\beta=\dfrac{4}{\alpha\beta}\end{cases};\begin{cases}\alpha=\beta\\ \left(\alpha\beta\right)^2=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\alpha=\beta=\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

- Do đó ta tìm được hai điểm : $A\left(-1-\frac{1}{\sqrt[4]{2}};1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}-\sqrt[4]{2}\right);B\left(-1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}};1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}+\sqrt[4]{2}\right)$

Bài 4.(ĐH-An ninh-98). Cho hàm số $y=\frac{x^2}{x-1}=x+1+\frac{1}{x-1}\quad(C)$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C)

b. Tìm trên (C) hai điểm A,B thuộc hai nhánh khác nhau sao cho AB ngắn nhất .

GIẢI

a. Học sinh tự vẽ đồ thị (C)

b. Gọi A thuộc nhánh trái $x_A<1\Rightarrow$ với số $\alpha>0$, đặt

$$x_A=1-\alpha<1\Leftrightarrow y_A=x_A+1+\frac{1}{x_A-1}=1-\alpha+1+\frac{1}{1-\alpha-1}=2-\alpha-\frac{1}{\alpha}\quad(1)$$

- Tương tự B thuộc nhánh phải $x_B>1\Rightarrow$ với số $\beta>0$, đặt :

$$x_B=1+\beta;\Rightarrow y_B=x_B+1+\frac{1}{x_B-1}=1+\beta+1+\frac{1}{1+\beta-1}=2+\beta+\frac{1}{\beta}\quad(2)$$

- Vậy

$$AB^2=\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2=\left[(1+\beta)-(1-\alpha)\right]^2+\left[\left(2+\beta+\frac{1}{\beta}\right)-\left(2-\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\right]^2$$

$$g(\alpha;\beta)=\left(\alpha+\beta\right)^2+\left(\alpha+\beta+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)^2=\left(\alpha+\beta\right)^2+\left(\alpha+\beta\right)^2\left(1+\frac{1}{\alpha\beta}\right)^2$$

$$=\left(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\right)\left(1+1+\frac{2}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\right)$$

$$g(\alpha;\beta)\geq\left(2\alpha\beta+2\alpha\beta\right)\left(1+1+\frac{2}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\right)=8\alpha\beta+\frac{4}{\alpha\beta}+8\geq 8+2\sqrt{4.8}=8+8\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow AB\geq\sqrt{8+8\sqrt{2}}$$

- Dấu đẳng thức xảy ra khi :

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\beta\\ 8\alpha\beta=\dfrac{4}{\alpha\beta}\end{cases};\begin{cases}\alpha=\beta\\ \left(\alpha\beta\right)^2=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\alpha=\beta=\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

- Do đó ta tìm được hai điểm : $A\left(1-\frac{1}{\sqrt[4]{2}};2-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}-\sqrt[4]{2}\right);B\left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}};2+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}+\sqrt[4]{2}\right)$

Bài 5. Cho hàm số $y=\frac{x+3}{x-3}=1+\frac{6}{x-3}\quad (C)$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C)

b. Tìm trên (C) hai điểm A,B thuộc hai nhánh khác nhau sao cho AB ngắn nhất .

GIẢI

a. Học sinh tự vẽ đồ thị (C)

b. Gọi A thuộc nhánh trái $x_A<3\Rightarrow$ với số $\alpha>0$, đặt

$$x_A=3-\alpha<3\Leftrightarrow y_A=1+\frac{6}{x_A-3}=1+\frac{6}{3-\alpha-3}=1-\frac{6}{\alpha}\quad (1)$$

- Tương tự B thuộc nhánh phải $x_B>1\Rightarrow$ với số $\beta>0$, đặt :

$$x_B=3+\beta;\Rightarrow y_B=1+\frac{6}{x_B-3}=1+\frac{6}{3+\beta-3}=1+\frac{6}{\beta}\quad (2)$$

Vậy :

$$AB^2=\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2=\left[(3+\beta)-(3-\alpha)\right]^2+\left[\left(1+\frac{6}{\beta}\right)-\left(1-\frac{6}{\alpha}\right)\right]^2$$

$$g(\alpha;\beta)=\left(\alpha+\beta\right)^2+\left(\frac{6}{\alpha}+\frac{6}{\beta}\right)^2=\left(\alpha+\beta\right)^2+\left(6\right)^2\left(\alpha+\beta\right)^2\left(1+\frac{1}{\alpha\beta}\right)^2$$

$$=\left(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\right)\left(1+36+\frac{2}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\right)$$

$$g(\alpha;\beta)\ge\left(2\alpha\beta+2\alpha\beta\right)\left(1+36+\frac{2}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\right)=148\alpha\beta+\frac{4}{\alpha\beta}+8\ge 8+2\sqrt{4.148}=8+8\sqrt{37}$$

$$\Leftrightarrow AB\ge\sqrt{8+8\sqrt{37}}$$

- Dấu đẳng thức xảy ra khi :

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\beta\\ 148\alpha\beta=\dfrac{4}{\alpha\beta}\end{cases};\begin{cases}\alpha=\beta\\ \left(\alpha\beta\right)^2=\dfrac{1}{37}\end{cases}\Rightarrow\alpha=\beta=\pm\frac{1}{\sqrt[4]{37}}$$

- Do đó ta tìm được hai điểm : $A\left(3-\frac{1}{\sqrt[4]{37}};1-\frac{6}{\sqrt[4]{37}}\right);B\left(3+\frac{1}{\sqrt[4]{37}};1+\frac{6}{\sqrt[4]{37}}\right)$

DẠNG 2: Cho đồ thị (C) có phương trình y=f(x). Tìm trên (C) điểm M sao cho

a. Tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ là nhỏ nhất

b. Khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ bằng nhau (Hay : Khoảng cách từ M đến trục hoành bằng k lần khoảng cách từ M đến trục tung)

c. Khoảng cách từ M đến I (là giao hai tiệm cận) là nhỏ nhất .

CÁCH GIẢI

A. Đối với câu hỏi : Tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ nhỏ nhất .

- Gọi M(x;y) với y=f(x). thì tổng khoảng cách từ M đến hai trục là d $\Rightarrow d=|x|+|y|$

- Xét các khoảng cách từ M đến hai trục khi M nằm ở các vị trí đặc biệt : Trên trục hoành , trên trục tung .

- Sau đó xét tổng quát ,những điểm M có hoành độ , hoặc tung độ lớn hơn hoành độ hoặc tung độ của M khi nằm trên hai trục , để suy ra cách tìm GTLN-GTNN của d .

BÀI TẬP MẪU:

Bài 1. Cho hàm số $y=\frac{x^2-2}{x-2}=x+2+\frac{2}{x-2}\quad(C)$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C)

b. Tìm những điểm M trên (C) sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ là nhỏ nhất .

GIẢI

a. Học sinh tự vẽ đồ thị (C).

b. - Xét những điểm M nằm trên trục Ox , cho y=0

$\Leftrightarrow x^2-2=0 \Rightarrow x=-\sqrt{2} \vee x=\sqrt{2} \Leftrightarrow M_1\left(-\sqrt{2};0\right);M_2\left(\sqrt{2};0\right)$

- Khoảng cách từ M đến hai trục là d $\Rightarrow d=\left|-\sqrt{2}\right|+|0|=\sqrt{2}$

- Xét những điểm M nằm trên trục Oy : cho x=0 , y= 1 , suy ra tồn tại 1 điểm M(0;1) . Vậy khoảng cách từ M đến hai trục là d = 0+1=1 < $\sqrt{2}$.

- Xét những điểm M có hoành độ : $|x|>\sqrt{2} \Rightarrow d=|x|+|y|>\sqrt{2}$.

- Xét những điểm M có hoành độ thỏa mãn : $|x|<\sqrt{2}$.

- Trường hợp : $-\sqrt{2}<x<0; y>0$

$\Rightarrow d=|x|+|y|=-x+x+2+\dfrac{2}{x-2}=2+\dfrac{2}{x-2}. \Rightarrow y'=-\dfrac{2}{(x-2)^2}<0$. Chứng tỏ hàm số nghịc biến . Do vậy mind =y(0)=1 . Có một điểm M(0;1)

- Trường hợp : $0<x<\sqrt{2}; y>0 \Rightarrow d=x+x+2+\dfrac{2}{x-2}=2x+2+\dfrac{2}{x-2};$ $y'=2-\dfrac{2}{(x-2)^2}=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=3$

- Bằng cách lập bảng biến thiên , ta suy ra mind = y(0)=1. Có một điểm M(0;1)

- Kết luận : Trên (C) có đúng một điểm M(0;1) có tổ ng khoảng cách từ nó đến hai tiệm cân là nhỏ nhất .

Bài 2. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}=x+1+\dfrac{1}{x+2} \quad (C)$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C)

b. Tìm trên đồ thị (C) những điểm M sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ là nhỏ nhất .

GIẢI

a. Học sinh tự vẽ đồ thị

b.- Xét những điểm M nằm trên trục Ox , cho y=0 ,

$\Leftrightarrow x^2+3x+3=0;\Delta=9-12=-3<0$. Vô nghiệm . Không có điểm M nào nằm trên trục Ox.

- Xét những điểm M nằm trên trục Oy , cho x=0 suy ra y=3/2 . Tồn tại 1 điểm M(0;3/2) . Khoảng cách từ M đến hai trục là d=0+3/2=3/2 .

- Xét những điểm M có hoành độ lớn hơn 3/2 . $\Rightarrow d=|x|+|y|>\frac{3}{2}$.

- Xét những điểm M có hoành độ nhỏ hơn 3/2 :

- Với $0<x<\frac{3}{2}\Rightarrow$ y>3/2 ; d=$|x|+|y|>3/2$
- Với $-\frac{3}{2}<x<0;y>0\Rightarrow d=-x+x+1+\frac{1}{x+2}=1+\frac{1}{x+2};d'=-\frac{1}{(x+2)^2}<0$.

  Chứng tỏ hàm số nghịch biến . Suy ra mind =y(0)= 3/2 . Có 1 điểm M(0;3/2).

- Kết luận : Trên (C) chỉ có đúng một điểm M(0;3/2) mà tổng khoảng cách từ M đến hai trục là nhỏ nhất .

Bài 3. Cho hàm số $y=\frac{x+2}{x-3}=1+\frac{5}{x-3}\quad(C)$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C)

b. Tìm trên (C) những điểm M sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai trục là nhỏ nhất .

GIẢI

a. Học sinh tự vẽ đồ thị (C)

b. - Tìm những điểm M nằm trên trục Ox : cho y=0 suy ra x = -2 . Tồn tại một điểm M(-2;0) $\Rightarrow d_M=|-2|+0=2$

- Tìm những điểm M nằm trên trục tung : cho x = 0 , suy ra y= -2/3

$\Leftrightarrow d_M=0+\left|-\frac{2}{3}\right|=\frac{2}{3}<2$

- Xét những điểm M có hoành độ : $|x| > \frac{2}{3} \Rightarrow d_M = |x| + |y| > \frac{2}{3}$.

- Xét những điểm M có hoành độ thỏa mãn : $|x| < \frac{2}{3}; y < -\frac{2}{3} \Rightarrow |y| > \frac{2}{3}(*)$

+) Trường hợp : $0 \le x \le \frac{2}{3}$. Do (*) cho nên : $d_M = |x| + |y| > \frac{2}{3}$

+) Trường hợp : $-\frac{2}{3} < x < 0; -\frac{2}{3} < y < 0 \Rightarrow d_M = -x - 1 - \frac{5}{x-3}; d'_M = -1 + \frac{5}{(x-3)^2}$

$d'_M = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 - \sqrt{5} \\ x = 3 + \sqrt{5} \end{array}\right.$. Khi lập bảng biến thiên ,ta thấy hàm số nghịch biến với mọi $x \in \left(-\frac{2}{3}; 0\right)$. Vậy $\min d_M = d_M(0) = \frac{2}{3}$. Trên (C) có một điểm M(-2/3;0) thỏa mãn yêu cầu bài toán .

B. Đối với câu hỏi :

Tìm m trên (C) sao cho khoảng cách từ M đến Ox bằng k lần khoảng cách từ M đến trục Oy .

CÁCH GIẢI

- Theo đầu bài ta có : $|y| = k|x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = kx \\ y = -kx \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} g(x;k) = 0 \\ h(x;k) = 0 \end{array}\right.$

- Bằng phương pháp tìm GTLN-GTNN của hàm số ta có kết quả .

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 5x + 15}{x+3} = x + 2 + \frac{9}{x+3} \quad (C)$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C)

b. Tìm trên (C) những điểm M sao cho khoảng cách từ M đến trục Ox bằng hai lần khoảng cách từ M đến trục Oy .

GIẢI

a. Học sinh tự vẽ đồ thị (C)

b. Theo giả thiết :

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2x \\ y=-2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2+5x+15}{x+3}=2x \\ \dfrac{x^2+5x+15}{x+3}=-2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x-15=0 \\ 3x^2+11x+15=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1-\sqrt{61}}{2} \vee x=\dfrac{-1+\sqrt{61}}{2} \\ \text{vô n}^0 \end{array}\right.$$

Như vậy trên (C) có hai điểm M với hoành độ của chúng là :

$x=\dfrac{-1-\sqrt{61}}{2} \vee x=\dfrac{-1+\sqrt{61}}{2}$

Bài 2.Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}=1-\dfrac{3}{x+1} \quad (C)$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C)

b. Tìm trên (C) những điểm M sao cho khoảng cách từ M đến trục Ox bằng ba lần khoảng cách từ M đến trục Oy .

GIẢI

a. Học sinh tự vẽ đồ thị (C) .

b. Theo giả thiết ta có :

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=3x \\ y=-3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x-2}{x+1}=3x \\ \dfrac{x-2}{x+1}=-3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2+2x+2=0 \\ 3x^2+4x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{vô n}^0 \\ x=\dfrac{-2-\sqrt{10}}{3} \vee x=\dfrac{-2+\sqrt{10}}{3} \end{array}\right.$$

Vậy trên (C) có hai điểm M có hoành độ : $x=\dfrac{-2-\sqrt{10}}{3} \vee x=\dfrac{-2+\sqrt{10}}{3}$, thỏa mãn yêu cầu bài toán .

C. Đối với câu hỏi :

* Tìm M trên (C) sao cho khoảng cách từ M đến I (là giao hai tiệm cận) là nhỏ nhất .

CÁCH GIẢI

- Tìm tọa độ của hai tiệm cận I(a;b)
- Tính khoảng cách IM bằng cách :

$\overrightarrow{IM}=(x-a;y-b) \Rightarrow IM^2=(x-a)^2+(y-b)^2=g(x;a,b)$

- Sử dụng phương pháp tìm GTLN -GTNN của hàm số ta có kết quả .

BÀI TẬP MẪU

BÀI 1.(ĐH-Ngoại ThươngA -2001). Cho hàm số $y=\frac{x^2+2x-2}{x-1}=x+3+\frac{1}{x-1}\quad (C)$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C)

b. Tìm M trên (C) sao cho khoảng cách từ M đến I là nhỏ nhất (với I là giao hai tiệm cận)

GIẢI

a. Học sinh tự vẽ đồ thị (C)

b. - Tọa độ của I là giao hai tiệm cận : I=(1;4)

- Gọi M(x;y) thuộc (C) , ta có :

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}=(x-1;y-4)\Rightarrow IM^2=g(x)=(x-1)^2+\left(x+3+\frac{1}{x-1}-4\right)^2=(x-1)^2+\left(x-1+\frac{1}{x-1}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow g(x)=(x-1)^2+(x-1)^2+\frac{1}{(x-1)^2}+2=2(x-1)^2+\frac{1}{(x-1)^2}+2\geq 2+2\sqrt{2}$$

$\Rightarrow \min IM=2+2\sqrt{2}$. Đạt được khi :

$$\Leftrightarrow 2(x-1)^2=\frac{1}{(x-1)^2};\Leftrightarrow (x-1)^4=\frac{1}{2}\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ x=1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{array}\right.$$

- Như vậy trên (C) tìm được hai điểm M có hoành độ : x=1 $-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ và x = 1+$\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán .

BÀI 2. (ĐH-SPII-2001). Cho hàm số $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}=x+\frac{1}{x-1}\quad (C)$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C)

b. Tìm A(x;y) thuộc (C) với (x>1) sao cho khoảng cách từ A đến I đạt GTNN (với I là giao hai tiệm cận)

GIẢI

a. Học sinh tự vẽ đồ thị (C)

b. - Giao hai tiệm cận là I (1;1)

- M là điểm bất kỳ thuộc (C) suy ra M(x; y) (x>1).

- Theo giả thiết ta có :

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}=(x-1;y-1)\Rightarrow IM^2=(x-1)^2+\left(x+\frac{1}{x-1}-1\right)^2=(x-1)^2+(x-1)^2+\frac{1}{(x-1)^2}+2$$

$$\Leftrightarrow g(x)=IM^2=2(x-1)^2+\frac{1}{(x-1)^2}+2\geq 2+2\sqrt{2};\Rightarrow \min g(x)=2+2\sqrt{2}$$

-Do đó : $\min IM=\sqrt{2+2\sqrt{2}}$ $\Leftrightarrow 2(x-1)^2=\frac{1}{(x-1)^2}\Rightarrow (x-1)^4=\frac{1}{2};\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ x=1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{array}\right.$

- Kết luận : Trên (C) có hai điểm M có hoành độ là : x= $1-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ và x=$1+-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$, thỏa mãn yêu cầu của bài toán .

DẠNG 3: Cho đường cong (C) và đường thẳng d : Ax+By+C=0 . Tìm điểm I trên (C) sao cho khoảng cách từ I đến d là ngắn nhất .

CÁCH GIẢI

- Gọi I thuộc (C) $\Rightarrow I(x_0;y_0=f(x_0))$

- Tính khoảng cách từ I đến d : $g(x_0)=h(I;d)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

- Khảo sát hàm số $y=g(x_0)$, để tìm ra minh.

MỘT SỐ VÍ DỤ ÁP DỤNG

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=\frac{x^2+4x+5}{x+2}=x+2+\frac{1}{x+2}\quad (C)$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C)

b. Tìm điểm M trên (C) sao cho khoảng cách từ M đến d : y+3x+6=0 là nhỏ nhất ?

GIẢI

a. Học sinh tự vẽ đồ thị (C)

b. - Gọi M là điemr bất kỳ thuộc (C) , thì : $M=(x;y)\quad \left(y=x+2+\frac{1}{x+2}\right)$

- Khoảng cách từ M đến d là h(M;d) :

$\Leftrightarrow h(M;d)=g(x)=\dfrac{|3x+y+6|}{\sqrt{10}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}\left|3x+6+x+2+\dfrac{1}{x+2}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{10}}\left|4(x+2)+\dfrac{1}{x+2}\right|.$

+) Khi x>-2 ,x+2>0

$\Rightarrow 4(x+2)+\dfrac{1}{x+2}\geq 4 \quad \Leftrightarrow 4(x+2)=\dfrac{1}{x+2};\Leftrightarrow (x+2)^2=\dfrac{1}{4}\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{5}{2}<-2 \\ x=-\dfrac{3}{2}>-2 \end{array}\right.$

Vậy : minh(M;d)= $\dfrac{4}{\sqrt{10}}$, khi x=-3/2

+) Khi x<-2 , thì x+2<0

$\Rightarrow -4(x+2)-\dfrac{1}{(x+2)}\geq 4 \Leftrightarrow -4(x+2)=-\dfrac{1}{x+2};\Leftrightarrow (x+2)^2=1\Rightarrow x=-\dfrac{5}{2}$

Do đó minh(M;d)= $\dfrac{4}{\sqrt{10}}$ khi x=-3 .

Tóm lại : minh(M;d)= $\dfrac{4}{\sqrt{10}}$ khi x=-1 và x=-3 .Có hai điểm M là M(-1;2) và M(-3;-2)

Ví dụ 2. (ĐH-KA-2005) Cho hàm số $y=mx+\dfrac{1}{x} \quad (C_m)$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) với m=1

b. Tìm m để khoảng cách từ điểm cực tiểu đến đường thẳng tiệm cận xiên của (C_m) bằng $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

GIẢI

a. Học sinh tự vẽ đồ thị (C)

b.Ta có :

- $y'=m-\dfrac{1}{x^2}=0\Leftrightarrow x^2=\dfrac{1}{m} \quad \Rightarrow m>0$. Qua bảng biến thiên , ta thấy điểm cực tiểu là $M=\left(\dfrac{1}{\sqrt{m}};2\sqrt{m}\right)$.

- Tiệm cận xiên của (C_m) là d : y=mx .

- Khoảng cách từ M đến d là h(M;d) bằng :

$$h(M;d)=\frac{\left|m.\frac{1}{\sqrt{m}}-2\sqrt{m}\right|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{\frac{m}{m^2+1}}$$

- Theo giả thiết : $\sqrt{\frac{m}{m^2+1}}=\sqrt{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow\frac{m}{m^2+1}=\frac{1}{2};\Rightarrow m^2-2m+1=0;\Leftrightarrow m=1>0$

- Kết luận : Với m=1 thì thỏa mãn yêu cầu bài toán .

Ví dụ 3.(ĐH-KB-2005). Cho hàm số $y=\frac{x^2+(m+1)x+m+1}{x+1}=x+m+\frac{1}{x+1}\quad(C_m)$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) với m=1

b. Chứng tỏ với mọi m hàm số luôn có cực đại , cực tiểu và khoảng cách giữa chúng bằng $\sqrt{20}$.

GIẢI

a. Học sinh tự vẽ đồ thị (C)

b. Ta có : $y'=1-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-1}{(x+1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$. Không phụ thuộc vào m , hay nói một cách khác là với mọi m hàm số luôn có cực đại tại A(-2;m-3) và điểm cực tiểu B(0;m+1).

- Khoảng cách giữa hai điểm cực đại và cực tiểu là AB .

$\Rightarrow AB^2=g(x;m)=4+4^2=20\Leftrightarrow AB=\sqrt{20}\quad(\text{dpcm})$.

DẠNG TOÁN 4. Cho đường cong (C) có phương trình y=f(x) và đường thẳng d : y=kx+m. Tìm m để d cắt (C) tại hai điểm A,B sao cho :

- AB là hằng số a
- AB ngắn nhất .

CÁCH GIẢI

-b1: Tìm điều kiện (*) của m để phương trình hoành độ điểm chung : f(x)=kx+m (1) có hai nghiệm

-b2 : Gọi $A(x_1;y_1);B(x_2;y_2)$ là hai giao điểm của d và (C) thì $x_1;x_2$ là hai nghiệm của (1)

-b3: Tính $AB=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}=g(x_1+x_2;x_1x_2;m)\quad (2)$

-b4: Áp dụng Vi-ét cho (1) , thay vào (2) , ta được : h(m)=0 . Giải phương trình này ta có kết quả .

LUYỆN TẬP

Ví dụ 1.(ĐH-Cần Thơ-98). Cho hàm số $=-x+3+\dfrac{3}{x-1}\quad (C)$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C)

b. Chứng minh với mọi m đường thẳng d : y=2x+m luôn cắt (C) tại hai điểm A,B có hoành độ x_1,x_2. Tìm m để khoảng cách $(x_2-x_1)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

c. Tìm m để khoảng cách AB đạt GTNN .

GIẢI

a. Học sinh tự vẽ đồ thị (C)

b. Hoành độ của A,B x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình :

$$\Leftrightarrow -x+3+\frac{3}{x-1}=2x+m;\Leftrightarrow -3x+3-m+\frac{3}{x-1}=0;\Rightarrow g(x;m)=3x^2+(m-6)x-m-3=0 \quad (1)$$

Điều kiện để có A,B : $\begin{cases}\Delta=(m-6)^2+12(m+3)>0\\ g(1;m)=-6\neq\end{cases}\Rightarrow m^2+72>0\forall m\in R$

- Khi đó : $(x_2-x_1)^2=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{6}=\dfrac{1}{6}\sqrt{m^2+72}\geq 12 \quad \Leftrightarrow m=0$

b. Khoảng cách $AB^2=(x_2-x_1)^2+\left[(2x_2+m)-(2x_2+m)\right]^2=(x_2-x_1)^2 5$

- Vậy : $AB=|x_2-x_1|\sqrt{5}=\dfrac{\sqrt{m^2+72}}{6}.\sqrt{5}\geq 12\sqrt{5} \quad \Leftrightarrow m=0$

Ví dụ 2.(DB-ĐHKD-2003). Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+(m+1)x+3m+2}{x-1}\quad (C_m)$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) với m=1.

b. Tìm m để C_m cắt trục Ox tại hai điểm A,B sao cho AB ngắn nhất .

GIẢI

a. Học sinh tự vẽ đồ thị (C)

b. Nếu C_m cắt trục Ox tại hai điểm A,B thì :

$\Rightarrow g(x;m)=x^2+(m+1)x+3m+2=0\,(1)$ có hai nghiệm x khác 1 .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m+1)^2 - 4(3m+2) > 0 \\ g(1;m) = 4m+4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 10m - 7 > 0 \\ m \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < 5 - \sqrt{32} \vee m > 5 + \sqrt{32} \\ m \neq 1 \end{cases} (*)$$

- Khoảng cách $AB = |x_2 - x_1| = \sqrt{\Delta} = \sqrt{m^2 - 10m - 7} = \sqrt{(m-5)^2 - 32} \Rightarrow \min AB = 32$.

Ví dụ 3.(ĐHKD-2003). Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x-2} = x + \dfrac{4}{x-2} \quad (C)$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C)

b. Tìm m để đường thẳng d : y=mx+2 -2m cắt (C) tại hai điểm A,B sao cho AB=2.

GIẢI

a. Học sinh tự vẽ đồ thị (C)

b.- Phương trình hoành độ điểm chung của (C) và d là

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 4}{x-2} = mx + 2 - 2m; \Leftrightarrow g(x;m) = (m-1)x^2 + 4(1-m)x + 4m - 8 = 0 \ (1)$$

- Để tồn tại A,B thì :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ \Delta' = 4(1-m)^2 - (m-1)(4m-8) > 0 \\ g(2;m) = -4 \neq \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 4m - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1 \ (*)$$

- Khi đó :

$$\Leftrightarrow AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + m^2(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|\sqrt{m^2+1} = \frac{2\sqrt{\Delta'}}{|m-1|}\sqrt{m^2+1} = \frac{2\sqrt{4m-4}}{|m-1|}\sqrt{m^2+1}$$

$$\Leftrightarrow AB = \frac{4\sqrt{(m-1)(m^2+1)}}{|m-1|} = 2 \Leftrightarrow 4(m-1)(m^2+1) = (m-1)^2; \Rightarrow (m-1)\left[4m^2 + 4 - (m-1)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m - 1 = 0 \\ 4m^2 - m + 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m = 1$$ .Vi phạm điều kiện (*) . Cho nên không tồn tại m .

Ví dụ 4.(ĐH-Duy Tân-2001). Cho hàm số

$$y = \frac{mx^2 + (m+3)x + 1}{x-2} = mx + m + 3 + \frac{7-2m}{x-2} \quad (C_m)$$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) với m=1

b. Tìm m đẻ đồ thị (1) cắt trục Ox tại hai điểm M,N sao cho MN ngắn nhất .

GIẢI

a.Học sinh tự vẽ đồ thị (C)

b. Nếu (1) cắt trục Ox tại hai điểm M,N thì :

$\Leftrightarrow g(x;m)=mx^2+\left(m+3\right)x+1=0 \quad (2)$ có hai nghiệm x khác 2 .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq \\ \Delta=\left(m+3\right)^2-4m>0 \\ g(2;m)=6m+7\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m^2+2m+9>0 \Rightarrow m\neq 0 \vee m\neq -\dfrac{7}{6} (*) \\ m\neq -\dfrac{7}{6} \end{cases}$$

Khi đó :

$$\Leftrightarrow MN=\left|x_2-x_1\right|=\frac{\sqrt{\Delta}}{a}=\frac{\sqrt{\left(m+1\right)^2+8}}{m}\Rightarrow MN^2=\frac{m^2+2m+9}{m^2}=1+\frac{2}{m}+\frac{9}{m^2}.$$

- Đặt $t=\dfrac{1}{m}\Rightarrow g(t;m)=1+2t+9t^2 \Leftrightarrow g'(t;m)=2(1+9t)=0\to t=-\dfrac{1}{9};g(-\dfrac{1}{9};m)=\dfrac{8}{9}$

- $\Rightarrow \min MN=\sqrt{\dfrac{8}{9}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3};\Leftrightarrow t=-\dfrac{1}{9}\to \dfrac{1}{m}=-\dfrac{1}{9}\Rightarrow m=-9$. Thỏa mãn (*)

Ví dụ 5. (ĐH-KA-2004). Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+3x-3}{2\left(x-1\right)} \quad \left(C\right)$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C)

b. Tìm m để đường thẳng d : y=m cắt (C) tại A,B sao cho AB=1.

GIẢI

a. Học sinh tự vẽ đồ thị (C)

b. Nếu d cắt (C) tại A,B thì hoành độ của A,B là hai nghiệm của phương trình :

$\Leftrightarrow -x^2+3x-3=2m\left(x-1\right)=0;\Leftrightarrow g(x;m)=x^2+\left(2m-3\right)x+3-2m=0 \quad (1)$ Có hai nghiệm khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=\left(2m-3\right)^2-4\left(3-2m\right)>0 \\ g(1;m)=1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4m^2-4m-3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-\dfrac{1}{2} \\ m>\dfrac{3}{2} \end{array}\right. (*)$$

- Khi đó $A\left(x_1;m\right);B\left(x_2m\right)\Rightarrow AB=\left|x_2-x_1\right|=\sqrt{\Delta}$

$\Leftrightarrow AB=\sqrt{4m^2-4m-3}=1; \Leftrightarrow 4m^2-4m-4=0 \Rightarrow m^2-m-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ m=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$. Thỏa mãn (*)

Ví dụ 6.(ĐH-QGA-2000). Cho hàm số $y=x+1+\dfrac{1}{x-1}\quad (C)$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C)

b. Tìm trên (C) điểm M (có hoành độ x>1) sao cho tiếp tuyến tại M tạo với hai tiệm cận một tam giác có :

+) Chu vi nhỏ nhất

+) Một tam giác có diện tích không đổi .

GIẢI

a. Học sinh tự vẽ đồ thị (C)

b.Gọi $M\left(x_0;y_0\right)\in(C)\Rightarrow y_0=x_0+1+\dfrac{1}{x_0-1}$.

- Tiếp tuyến tại M có PT : $y=\left[1-\dfrac{1}{\left(x_0-1\right)^2}\right]\left(x-x_0\right)+x_0+1+\dfrac{1}{x_0-1}\quad (*)$ và I là giao hai tiệm cận

- Tọa độ của I (1;2)

- Tiếp tuyến cắt tiệm cận đứng : x=1 tại điểm B

$\Rightarrow y_B=2\left(1+\dfrac{1}{x_0-1}\right)\Leftrightarrow B\left(1;2+\dfrac{2}{x_0-1}\right)$

- Tiếp tuyến cắt tiệm cận xiên : y=x+1 tại điểm A.

$\Leftrightarrow\left[1-\dfrac{1}{\left(x_0-1\right)^2}\right]\left(x_A-x_0\right)+x_0+1+\dfrac{1}{x_0-1}=x_A+1\Leftrightarrow x_A=1-2x_0\Rightarrow A\left(2x_0-1;2x_0\right)$

+) Diện tích tam giác AIB là S . $\Rightarrow S=\dfrac{1}{2}IA.IB.\sin 45^0=\dfrac{1}{4}\sqrt{2}IA.IB\quad (1)$

Ta có : $\overline{IA}=\left(2x_0-2;2x_0-2\right)\Rightarrow IA^2=8\left(x_0-1\right)^2\Leftrightarrow IA=\left|x_0-1\right|2\sqrt{2}$

Tương tự : $\overline{IB} = \left(0; \frac{2}{x_0 - 1}\right) \Rightarrow IB = \frac{2}{|x_0 - 1|}; \Leftrightarrow IA.IB = |x_0 - 1| 2\sqrt{2}.\frac{2}{|x_0 - 1|} = 4\sqrt{2}$

$\Rightarrow S = \frac{1}{4}\sqrt{2}.4\sqrt{2} = 2 \quad (dvdt)$. Không phụ thuộc vào vị trí của điểm M .

+) Gọi chu vi tam giác IAB là P = IA+IB+AB .

Nhưng

$$AB^2 = IA^2 + IB^2 - 2IA.IB.\cos 45^0 \geq 2IA.IB - 2IA.IB.\frac{\sqrt{2}}{2} = IA.IB\left(1 - \sqrt{2}\right) = 4\sqrt{2}\left(1 - \sqrt{2}\right)$$
$$= 4\left(\sqrt{2} - 2\right)$$

(Dáu đẳng thức xảy ra khi IA=IB (a))

- Mặt khác : $IA + IB \geq 2\sqrt{IA.IB} = 2\sqrt{4\sqrt{2}} = 2\sqrt[4]{2}$. Đấu đẳng thức xảy ra khi : IA=IB

-Do đó : $P \geq 2\sqrt[4]{2} + \sqrt{4\left(\sqrt{2} - 2\right)} = 2\sqrt[4]{2} + 2\sqrt{\sqrt{2} - 2} \Rightarrow \min P = 2\sqrt[4]{2} + 2\sqrt{\sqrt{2} - 2}$.

- Xảy ra khi : $|x_0 - 1|\sqrt{2} = \frac{2}{|x_0 - 1|} \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = \sqrt{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 - \sqrt[4]{2} \to y_0 = 2 - \sqrt[4]{2} - \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ x_0 = 1 + \sqrt[4]{2} \to y_0 = 2 + \sqrt[4]{2} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{array}\right.$

Như vậy có hai điểm M :

$$M_1 = \left(1 - \sqrt[4]{2}; y_0 = 2 - \sqrt[4]{2} - \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) M_2 = \left(1 + \sqrt[4]{2}; y_0 = 2 + \sqrt[4]{2} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$$

Ví dụ 7.Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+2} = 2 - \frac{3}{x+2}(C)$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C)

b. Tìm m để đường thẳng d : y=-x+m cắt (C) tại hai điểm A,B sao cho AB nhỏ nhất .

GIẢI

a. Học sinh tự vẽ đồ thị (C)

b. - Nếu d cắt (C) tại A,B thì hoành độ A,B là hai nghiệm của phương trình :

$\Leftrightarrow \frac{2x+1}{x+2} = -x + m; \Leftrightarrow g(x;m) = x^2 + (4 - m)x + 1 - 2m = 0\ (1)$ có hai nghiệm khác -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (4-m)^2 - 4(1-2m) > 0 \\ g(-2;m) = 2m-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 12 > 0 \\ m \neq \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow m \neq \frac{3}{2} (*)$$

- Khi đó $A(x_1;-x_1+m); B(x_2;-x_2+m) \Rightarrow AB^2 = (x_2-x_1)^2 + (x_1-x_2)^2 = 2(x_2-x_1)^2$

- Vậy : $AB = |x_2 - x_1|\sqrt{2} = \sqrt{\Delta}\sqrt{2} = \sqrt{2}.\sqrt{m^2+12} \geq \sqrt{2}2\sqrt{3} = 2\sqrt{6}; \Leftrightarrow m = 0$.

Khi m = 0 thì AB nhỏ nhất bằng $2\sqrt{6}$.

Ví dụ 8. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2mx + 2}{x+1} = x + 2m - 1 + \dfrac{3-2m}{x+1} \quad (C_m)$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) với m=1

b. Tìm các giá trị của m để hàm số có cực đại , cực tiểu và khoảng cách từ hai điểm đó tới đường thẳng d : x+y+2=0 bằng nhau .

GIẢI

a. Học sinh tự vẽ đồ thị (C)

b. Tập xác định : D=R$\setminus\{-1\}$

- Đạo hàm : $y' = \dfrac{x^2 + 2x + 2m - 2}{(x+1)^2}$

- Hàm số có cực đại , cực tiểu , thì y'=0 có hai nghiệm phân biệt khác -1.

$\Leftrightarrow g(x;m) = x^2 + 2x + 2m - 2 = 0 \quad (1)$(có hai nghiệm $x_1, x_2 \neq -1$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 3 - 2m > 0 \\ g(-1;m) = 2m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{3}{2} \quad (*)$$

- Gọi $A(x_1;y_1); B(x_2;y_2)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số . $x_1, x_2 \neq -1$ là hai nghiệm của phương trình (1) . Theo định lý Vi-ét : $x_1 + x_2 = -2; x_1.x_2 = -2m$

- Mặt khác đường thẳng đi qua hai điểm cực trị có phương trình : y=2x+m , cho nên : $y_1 = 2x_1 + m; y_2 = 2x_2 + m \Rightarrow A(x_1; 2x_1 + m); B(x_2; 2x_2 + m)$

- Theo giả thiết :

$$\frac{|x_1 + y_1 + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|x_2 + y_2 + 2|}{\sqrt{2}} \Rightarrow |x_1 + y_1 + 2| = |x_2 + y_2 + 2| \Leftrightarrow |3x_1 + 2m + 2| = |3x_2 + 2m + 2|$$

$\Leftrightarrow (3x_1+2m+2)^2-(3x_2+2m+2)^2=0 \Leftrightarrow (x_1-x_2)\left[3(x_1+x_2+4m+4)\right]=0$

$\Leftrightarrow 3(x_1+x_2+4m+4)=0\ (x_1\neq_2) \Leftrightarrow 3(2)+4m+4=0 \Rightarrow m=-\frac{1}{2}$. Thỏa mãn (*)

Vậy giá trị m cần tìm là : $m=-\frac{1}{2}$.

Ví dụ 9 . Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+1 \quad (C_m)$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) với m=1

b. Chứng minh rằng với mọi m hàm số luôn có cực đại , cực tiểu . Tìm m để khoảng cách giữa các diểm cực đại , cực tiểu là nhỏ nhất .

GIẢI

a. Học sinh tự vẽ đồ thị (C)

b. Tập xác định : D=R

- Ta có đạo hàm : $y'=x^2-2mx-1$.

- Xét : $g(x;m)=x^2-2mx-1=0 \quad (1) \Rightarrow \Delta'=m^2+1>0 \forall m\in R$. Chứng tỏ hàm số luôn có CĐ,CT .

- Bằng phép chia đa thức : $y=\left(\frac{1}{3}x-\frac{m}{3}\right)y'-\frac{2}{3}(m^2+1)x+\frac{2}{3}m+1$. Cho nên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị có PT : $y=-\frac{2}{3}(m^2+1)x+\frac{2}{3}m+1$.

- Gọi hai điểm cực trị là : $A\left(x_1;-\frac{2}{3}(m^2+1)x_1+\frac{2}{3}m+1\right);B\left(x_2;-\frac{2}{3}(m^2+1)x_2+\frac{2}{3}m+1\right)$

$$\Rightarrow AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+\left[-\frac{2}{3}(m^2+1)(x_2-x_1)\right]^2}=|x_2-x_1|\sqrt{1+\frac{4}{9}(m^2+1)^2}=\frac{2\sqrt{\Delta'}}{1}\sqrt{1+\frac{4}{9}(m^2+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow AB=2\sqrt{m^2+1}.\sqrt{1+\frac{4}{9}(m^2+1)^2}=2\sqrt{(m^2+1)\left(1+\frac{4}{9}(m^2+1)^2\right)}$$

- Đặt : $t=m^2+1\geq 1 \Rightarrow AB=f(t)=2\sqrt{\frac{4}{9}t^3+t} \Rightarrow g(t)=\frac{4}{3}t^3+t; g'(t)=4t^2+1>0\forall t\geq 1$

Hàm số g(t) luôn đồng biến . Do đó ming(t)=g(1)=7/3.

- Vậy $\min AB = 2\sqrt{\frac{7}{3}} = 2\frac{\sqrt{21}}{3} \Leftrightarrow t = 1; \Leftrightarrow m^2 + 1 = 1 \Rightarrow m = 0$

Ví dụ 10. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4 \quad (C)$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C)

b. Cho điểm I(-1;0). Xác định các tham số thực m để đường thẳng d : y=mx+m cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt I,A,B sao cho AB < $2\sqrt{2}$.

GIẢI

a. Học sinh tự vẽ đồ thị (C)

b. Tọa độ của ba điểm là ba nghiệm của phương trình :

$$\Leftrightarrow x^3 3x^2 + 4 = m(x+1); \Leftrightarrow (x+1)\left(x^2 - 4x + 4 - m\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ g(x;m) = (x-2)^2 - m = 0 \quad (1) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 - \sqrt{m} \\ x = 2 + \sqrt{m} \\ m > 0 \end{array}\right.$$

- Do đó A,B có hoành độ là hai nghiệm của (1).

- Gọi $A(x_1; mx_1 + m); B(x_2; mx_2 + m) \Rightarrow AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + m^2(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|\sqrt{m^2 + 1}$

- Theo giả thiết : AB < $2\sqrt{2}$.

$$\Leftrightarrow |x_2 - x_1|\sqrt{m^2+1} < 2\sqrt{2}; \Leftrightarrow \left|\left(2+\sqrt{m}\right) - \left(2 - \sqrt{m}\right)\right|\sqrt{m^2+1} < 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{m\left(m^2+1\right)} < 2\sqrt{2}$$

$\Leftrightarrow m^3 + m - 2 < 0 \Leftrightarrow (m-1)\left(m^2 + m + 2\right) < 0 \Rightarrow m < 1$. Kết hợp với m>0 , ta có : 0<m<1 là đáp số của bài toán .

Ví dụ 11. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-2} = 2 + \frac{5}{x-2} \quad (C)$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C)

b. Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại M(0;1). Hãy tìm trên (C)những điểm có hoành độ x>1 mà khoảng cách từ đó đến d là ngắn nhất .

GIẢI

a. Học sinh tự vẽ đồ thị (C)

b.Ta có : $y'=-\frac{5}{(x-2)^2}\Rightarrow y'(0)=-\frac{5}{4}$

- Phương trình tiếp tuyến d tại M : $y=-\frac{5}{4}(x-0)+1=-\frac{5}{4}x+1;\Rightarrow 5x+4y-4=0$

- Gọi $M(x;y)\in(C)$ với x>1 . Khoảng cách từ M đến d là h(M;d) thì :

$$\Rightarrow h(M;d)=\frac{|5x-4y+4|}{\sqrt{25+16}}=\frac{1}{\sqrt{41}}|5x-4y+4|=\frac{1}{\sqrt{41}}\left|5x+4\left(2+\frac{5}{x-2}\right)-4\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{41}}\left|5x+4+\frac{20}{x-2}\right|$$

$$\Rightarrow g(x)=5x+4+\frac{20}{x-2}(x>1);g'(x)=5-\frac{20}{(x-2)^2}=0\Leftrightarrow x=0\vee x=4$$

- Bằng cách lập bảng biến thiên , ta thấy ming(x)=g(4)=34

- Kết luận : $\min h(M;d)=\frac{1}{\sqrt{41}}.34$ khi x=4 và y=$2+\frac{5}{2}=\frac{9}{2}\Rightarrow\exists:A\left(4;\frac{9}{2}\right)\in(C)$

Ví dụ 12 . Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x-2}=2+\frac{5}{x-2}\quad(C)$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C)

b. Tìm hai điểm M,N thuộc (C) sao cho tiếp tuyến tại M,N song song với nhau và khoảng cách giữa hai tiếp tuyến là lớn nhất .

GIẢI

a. Học sinh tự vẽ đồ thị (C)

b.Tập xác định : D=R$\backslash\{2\}$

- Đạo hàm : $y'=-\frac{5}{(x-2)^2}$

- Gọi : $M(x_1;y_1);N(x_2;y_2)\in(C).k_M=-\frac{5}{(x_1-2)^2};k_N=-\frac{5}{(x_2-2)^2}$

- Nếu hai tiếp tuyến song song với nhau :

$$\Rightarrow k_M=k_N\Leftrightarrow-\frac{5}{(x_1-2)^2}=-\frac{5}{(x_2-2)^2}\Leftrightarrow(x_2-2)^2-(x_1-2)^2=0$$

$$\Leftrightarrow(x_2-x_1)(x_2+x_1-4)=0\Leftrightarrow x_1+x_2-4=0\quad(1)\quad(x_1\neq x_2)$$

- Khoảng cách hai tiếp tuyến ngắn nhất khi MN vuông góc với hai tiếp tuyến :

$$\Leftrightarrow k_{MN}.k_M = -1; k_{MN} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{(x_2 - x_1)}\left[\left(2 + \frac{5}{x_2 - 2}\right) - \left(2 + \frac{5}{x_1 - 2}\right)\right]$$

$$= \frac{-5(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - 2)(x_1 - 2)} = -\frac{5}{(x_2 - 2)(x_1 - 2)}$$

$$\Leftrightarrow k_M = -\frac{5}{(x_1 - 2)^2} \Rightarrow k_{MN}.k_M = \frac{5}{(x_2 - 2)(x_1 - 2)}\frac{5}{(x_1 - 2)^2} = -1.$$ Từ (1) $x_2 - 2 = 2 - x_1$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{(2 - x_1 - 2)(x_1 - 2)}\frac{5}{(x_1 - 2)^2} = -1 \Leftrightarrow x_1(x_1 - 2)^3 = \frac{1}{25}$$

$$\Leftrightarrow 25x_1^4 - 6.25x_1^3 + 25.16x_1^2 - 8.25x_1 - 1 = 0$$

Ví dụ 13. Cho hàm số $y = \frac{2x + 4}{1 - x} = -2 + \frac{6}{1 - x} \quad (C)$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C)

b. Gọi d là đường thẳng đi qua M(1;3) có hệ số góc là k .Tìm k để d cắt (C) tại hai điểm A,B sao cho AB = $3\sqrt{10}$.

GIẢI

a. Học sinh tự vẽ đồ thị (C)

b. - Đường thẳng d : y=k(x-1)+1 .

- Nếu d cắt (C) tại A,B thì hoành độ của A,B là hai nghiệm của phương trình :

$\Leftrightarrow \frac{2x + 4}{1 - x} = kx + 1 - k; \Leftrightarrow g(x;k) = kx^2 + (3 - 2k)x + k + 3 = 0 \quad (1)$. (có hai nghiệm phân biệt khác1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta = (3 - 2k)^2 - 4k(k + 3) > 0 \\ g(1;k) = 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ 9 - 24k > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k < \frac{9}{24} \end{cases} \quad (*)$$

- Với điều kiện (*) thì d cắt (C) tại hai điểm A,B

- Gọi

$$A(x_1; kx_1 + 3 - k); B(x_2; kx_2 + 3 - k) \Rightarrow AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + k^2(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|\sqrt{k^2 + 1}$$

- Theo giả thiết :

$$\Leftrightarrow AB=\frac{\sqrt{9-24k}}{|k|}\sqrt{k^2+1}=3\sqrt{10}\Leftrightarrow(9-24k)(k^2+1)=90k^2\Rightarrow 24k^3+81k^2+24k+9=0$$

$$\Leftrightarrow 3(k+3)(8k^2+3k-1)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}k=-3\\8k^2+3k-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=-3\\k=\dfrac{-3-\sqrt{41}}{16}\vee k=\dfrac{-3+\sqrt{41}}{16}\end{array}\right.\quad(**)$$

- Vậy với k thỏa mãn (**) thì d cắt (C) tại A,B và AB= $3\sqrt{10}$

Ví dụ 14. Cho hàm số $y=x^3-3x+2\quad(C)$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C)

b. Tìm điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến tại M cắt (C) ở N mà MN= 2 $\sqrt{6}$.

GIẢI

a. Học sinh tự vẽ đồ thị (C)

- Đạo hàm : $y'=3x^2-3=0\Leftrightarrow x=-1\vee x=1$

- Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)\Rightarrow y_0=x_0^3-3x_0+2$

- Tiếp tuyến d tại M có phương trình :

$$y=(3x_0^2-3)(x-x_0)+x_0^3-3x_0+2=3(x_0-1)\left[(x_0+1)(x-x_0)+(x_0^2+x_0-2)\right]$$

- Nếu d cắt (C) tại N thì :

$$\Leftrightarrow x^3-3x+2=(3x_0^2-3)(x-x_0)+x_0^3-3x_0+2$$

$$\Leftrightarrow x^3-x_0^3-3(x-x_0)-(3x_0^2-3)(x-x_0)=0\Leftrightarrow(x-x_0)\left[(x^2+xx_0+x_0^2)-3-(3x_0^2-3)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-x_0=0\\x^2+xx_0-2x_0^2=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_0\\x=-4x_0\\x=x_0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_0\\x=-4x_0\end{array}\right..$$

- Như vậy , điểm N là điểm có hoành độ là : $x_N=-4x_0\Rightarrow N\left(-4x_0;(4x_0+1)^2(4x_0-2)\right)$

- Ta có : $MN=\sqrt{(-5x_0)^2+\left[(4x_0+1)^2(4x_0-2)-(x_0-1)^2(x_0-2)\right]^2}$

$$\Leftrightarrow MN=\sqrt{25x_0^2+(-65x_0^2+15x_0)^2}=5|x_0|\sqrt{1+(3-13x_0)^2}=5|x_0|\sqrt{169x_0^2-78x_0+10}$$

- Theo giả thiết :

$\Rightarrow 5|x_0|\sqrt{169x_0^2-78x_0+10}=2\sqrt{6} \Leftrightarrow \left(25x_0^2\right)\left(169x_0^2-78x_0+10\right)=24$

Ví dụ 15 .Cho hàm số $y=\dfrac{3x-2}{x-1}=3+\dfrac{1}{x-1}\quad (C)$.

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) .

b. Viết phương trình đường thẳng đi qua M(1;3) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho AB=$2\sqrt{3}$.

GIẢI

a. Học sinh tự vẽ đồ thị (C)

b. Gọi d là đường thẳng đi qua M có hệ số góc là k , thì d : y=k(x -1)+3 (1)

- Nếu d cắt (C) tại hai điểm A,B thì hoành độ A,B là hai nghiệm của phương trình :

$\Leftrightarrow \dfrac{3x-2}{x-1}=kx+3-k \Leftrightarrow g(k;x)=kx^2-2kx+k-1=0\quad (2)$ Có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k\neq 0 \\ \Delta'=k^2-k(k-1)>0 \\ g(1;k)=-1\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k\neq 0 \\ k>0 \end{cases} \Leftrightarrow k>0 \quad (*)$$

- Gọi

$A(x_1;kx_1+3-k);B(x_2;kx_2+3-k) \Rightarrow AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+k^2(x_2-x_1)^2}=|x_2-x_1|\sqrt{k^2+1}$.

Với x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình (2).

- $\Rightarrow AB=\dfrac{2\sqrt{\Delta'}}{a}.\sqrt{k^2+1}=\dfrac{2\sqrt{k}}{|k|}.\sqrt{k^2+1}=2\sqrt{3}; \Leftrightarrow \sqrt{k(k^2+1)}=|k|\sqrt{3} \Leftrightarrow k(k^2+1)=3k^2$

$\Leftrightarrow k^2+1=3k \Leftrightarrow k^2-3k+1=0 \Rightarrow k=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \vee k=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. Thỏa mãn (*).

- Vậy đáp số : $k=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \vee k=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 16. Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x-1}=2+\dfrac{2}{x-1}\quad (C)$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C)

b. Tìm các giá trị của m để đường thẳng d : y=mx -m+2 cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho đoạn AB có độ dài nhỏ nhất .

GIẢI

a. Học sinh tự vẽ đồ thị (C)

b. Nếu d cắt (C) tại A,B thì hoành độ của A,B là hai nghiệm của phương trình :

$\Leftrightarrow \dfrac{2x}{x-1} = mx - m + 2 \Leftrightarrow g(x;m) = mx^2 - 2mx + m - 2 = 0 \quad (1)$ có hai nghiệm x khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - m(m-2) > 0 \\ g(1;m) = -2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \\ 2m > 0 \end{cases} \Rightarrow m > 0 \quad (*)$$

- Với điều kiện (*) thì d cắt (C) tại A,B có hoành độ là hai nghiệm của (1)

- Gọi

$$A(x_1; mx_1 - m + 2); B(x_2; mx_2 - m + 2) \Rightarrow AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + m^2(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|\sqrt{m^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow AB = \frac{2\sqrt{\Delta'}}{a}.\sqrt{m^2+1} = \frac{2\sqrt{2m}}{|m|}.\sqrt{m^2+1} = 2\sqrt{\frac{2m(m^2+1)}{m^2}} = 2\sqrt{\frac{2(m^2+1)}{m}} \geq 2\sqrt{4} = 4.$$

- Vậy min AB=4 khi m=1.

Ví dụ 17. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1 \quad (C)$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C)

b. Tìm hai điểm A,B trên (C) sao cho tiếp tuyến tại A,B song song với nhau và AB $= 4\sqrt{2}$.

GIẢI

a. Học sinh tự vẽ đồ thị (C)

b.Ta có $y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow k_A = 3x_1^2 - 6x_1; k_B = 3x_2^2 - 6x_2$

- Nếu hai tiếp tuyến tại A,B song song nhau thì :

$$\Leftrightarrow 3x_2^2 - 6x_2 = 3x_1^2 - 6x_1; \Leftrightarrow 3(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 \neq x_2 \\ x_1 + x_2 = 2\ (*) \end{array}\right.$$

- Do

$$\begin{aligned} A,B \in (C) \Rightarrow y_1 = x_1^3 - 3x_1^2 + 1; y_2 = x_2^3 - 3x_2^2 + 1 \Leftrightarrow y_2 - y_1 \\ = (x_2 - x_1)\left[(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) - 3(x_1 + x_2)\right] \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow y_2 - y_1 = (x_2 - x_1)\left[(x_1 + x_2)^2 - 3(x_1 + x_2) - x_1x_2\right] = (x_2 - x_1)(4 - 3.2 - x_1x_2)$$
$$= -(x_2 - x_1)(2 + x_1x_2) \quad (**)$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2(2 + x_1x_2)^2} = |x_2 - x_1|\sqrt{1 + (2 + x_1x_2)^2}$$

Theo giả thiết :

$$|x_2 - x_1|\sqrt{1 + (2 + x_1x_2)^2} = 4\sqrt{2} \Rightarrow (x_2 - x_1)^2\left[1 + (2 + x_1x_2)^2\right] = 32$$
$$\Leftrightarrow \left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2\right]\left[1 + (2 + x_1x_2)^2\right] = 32;$$

- Đặt t=x_1x_2, và thay $x_1 + x_2 = 2$ (do *)ta có :

$$(4 - 4t)(5 + 4t + t^2) - 32 = 0; \Leftrightarrow t^3 + 3t^2 + t + 3 = 0 \Leftrightarrow (t^2 + 1)(t + 3) = 0 \Rightarrow t = -3$$

- Vậy ta có hệ : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow X^2 - 2X - 3 = 0 \Rightarrow X = -1 \vee X = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases} \end{array}\right.$

- Do đó tồn tại hai điểm $A(-1;-3); B(3;1) \vee A(3;1); B(-1;-3)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Bài 1. Cho hàm số: $y = \dfrac{x + 2}{x - 3}$

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số .

b.Tìm trên đồ thị điểm M sao cho khoảng cách từ M đến đường tiệm cận đứng bằng khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang.

Bài 2. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2x + 1}{1 - x}$ (H)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (H) của hàm số

b. Gọi (Δ) là tiếp tuyến tại điểm M(0; 1) với đồ thị (H). Hãy tìm trên (H) những điểm có hoành độ x > 1 mà khoảng cách từ đó đến (Δ) là ngắn nhất.

Bài 3. Cho hàm số $y = \dfrac{mx + m - 1}{x + m - 1}$. (C).

1. Khảo sát hàm số khi m=2
2. Tìm trên (C) những điểm có tổng khoảng cách đến hai đường tiệm cận nhỏ nhất.

Bài 4. cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ (C).

a. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

b .Tìm M thuộc (C) sao cho tổng khoảng cách từ m đến hai trục toạ độ nhỏ nhất.

Bài 5. Tìm trên đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+2}{x-2}$ các điểm cách đều hai trục toạ độ.

Bài 6. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - 3x + 3m + 2\ (C_m)$. Định m để (C_m) có cực đại cực tiểu đồng thời khoảng cách giữa chúng là bé nhất.

Bài 7. Cho $(C): y = \dfrac{2x+2}{x-1}$. Tìm tọa độ các điểm M nằm trên (C) có tổng khoảng cách đến hai tiệm cận là nhỏ nhất.

Bài 8. Cho hàm số $(C): y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$. Tìm cá điểm M thuộc (C) có tổng khoảng cách đến 2 tiệm cận là nhỏ nhất.

Bài 9. Cho hàm số $(C): y = \dfrac{2x+2}{x-1}$. Tìm 2 điểm M, N thuộc hai nhánh khác nhau của (C) sao cho đoạn MN nhỏ nhất.

Bài 20. Cho hàm số $(C): y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x+1}$. Tìm 2 điểm M, N thuộc 2 nhánh khác nhau của (C) sao cho đoạn MN nhỏ nhất.

Bài 21. Cho hàm số $(C): y = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x - 1}$.

a. Tìm các điểm thuộc đồ thị (C) có tổng khoảng cách đến 2 trục tọa độ là nhỏ nhất.

b. Tìm 2 điểm M, N thuộc 2 nhánh khác nhau của (C) sao cho đoạn MN nhỏ nhất.

Bài 22. (ĐH Khối–A 2005)Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số: $y = mx + \frac{1}{x}$ (*) (m là tham số) a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (*) khi $m = \frac{1}{4}$.

b. Tìm m để đồ thị hàm số (*) có cực trị và khoảng cách từ điểm cực tiểu của (C_m) đến tiệm cận xiên bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Bài 23. Cho đồ thị (C) và điểm A. Tìm điểm M trên (C) sao cho AM nhỏ nhất. Chứng minh rằng khi AM nhỏ nhất thì đường thẳng AM vuông góc với tiếp tuyến của (C) tại M.

a) $(C): y = x^2 - 1; A \equiv O(0;0)$ b) $(C): y = x^2; A(3;0)$

c) $(C): y = 2x^2 + 1;$ $A(9;1)$

Bài 24. Cho đồ thị (C) và đường thẳng d. Tìm điểm M trên (C) sao cho khoảng cách từ M đến d là nhỏ nhất.

a) $(C): y = 2x^4 - 3x^2 + 2x + 1; d: y = 2x - 1$ b) $(C): y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2};$ $d: y = -3x - 6$

c) $(C): y = x - x^2;$ $d: y = 2(x + 1)$ d) $(C): y = \frac{x + 1}{x - 1}; d: y = -2x + 3$

Bài 25. Tìm các điểm M thuộc đồ thị (C) sao cho d(M,Ox) = **k**.d(M,Oy) với k cho trước.

a) $(C): y = \frac{x + 2}{x - 2};$ $k = 1$ b) $(C): y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1};$ $k = 1$

c) $(C): y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1};$ $k = 2$ d) $(C): y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1};$ $k = 2$

Bài 26. Tìm các điểm M thuộc hypebol (H) sao cho tổng các khoảng cách từ đó đến hai tiệm cận là nhỏ nhất.

a) $(H): y = \frac{x + 2}{x - 2}$ b) $(H): y = \frac{2x - 1}{x + 1}$ c) $(H): y = \frac{4x - 9}{x - 3}$

d) $(H): y = \frac{x^2 + x - 2}{x - 3}$ e) $(H): y = \frac{x^2 - x + 1}{2 - x}$ f) $(H): y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$

Bài 27. Tìm các điểm M thuộc hypebol (H) sao cho tổng các khoảng cách từ đó đến hai trục toạ độ là nhỏ nhất.

a) $(H): y=\dfrac{x-1}{x+1}$ b) $(H): y=\dfrac{2x+1}{x-2}$ c) $(H): y=\dfrac{4x-9}{x-3}$

d) $(H): y=\dfrac{x^2+x-11}{x-1}$ e) $(H): y=\dfrac{x^2-3}{x-2}$ f) $(H): y=\dfrac{x^2+x-6}{x-3}$

Bài 28. Tìm các điểm M thuộc hypebol (H) sao cho khoảng cách từ đó đến giao điểm của hai tiệm cận là nhỏ nhất.

a) $(H): y=\dfrac{x^2+2x+2}{x-1}$ b) $(H): y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}; x>1$

Bài 29. Cho hypebol (H). Tìm hai điểm A, B thuộc hai nhánh khác nhau của (H) sao cho độ dài AB là nhỏ nhất.

a) $(H): y=\dfrac{x-1}{x+1}$ b) $(H): y=\dfrac{2x+3}{2-x}$ c) $(H): y=\dfrac{4x-9}{x-3}$

d) $(H): y=2x+1+\dfrac{1}{x}$ e) $(H): y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$ f) $(H): y=\dfrac{x^2-2x+5}{1-x}$

Bài 30. Cho (C) và đường thẳng d. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm A, B sao cho độ dài AB là nhỏ nhất.

a) $(H): y=\dfrac{x^2+6x-4}{x+1};\ d: y=k$ b) $(H): y=\dfrac{x+1}{x-1}; d: 2x-y+m=0$