A. MỞ ĐẦU

Trong một vài năm trở lại đây thì trong các đề thi vào lớp 10 trung học phổ thông , các bài toán về phương trình bậc hai có sử dụng tới hệ thức Vi- Et xuất hiện khá phổ biến . Trong khi đó nội dung và thời lượng về phần này trong sách giáo khoa lại rất ít, lượng bài tập chưa đa dạng .

Ta cũng thấy để giải được các bài toán có liên qua đến hệ thức Vi – Et, học sinh cần tích hợp nhiều kiến thức về đại số , thông qua đó học sinh có cách nhìn tổng quát hơn về hai nghiệm của phương trình bậc hai với các hệ số.

Vậy nên nhóm toán chúng tôi xây dựng chuyên đề này ngoài mục đích giúp học sinh nâng cao kiến thức còn giúp các em làm quen với một số dạng toán có trong đề thi vào lớp 10 trung học phổ thông

Nội dung chính của chuyên đề gồm :

B. NỘI DUNG CHUYÊN ĐỀ :
ỨNG DỤNG CỦA HỆ THỨC VI-ÉT TRONG GIẢI TOÁN

Cho phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$ $(a\neq 0)$ (*)

Có hai nghiệm $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Suy ra: $x_1 + x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2b}{2a} = \dfrac{-b}{a}$

$$x_1x_2 = \frac{(-b-\sqrt{\Delta})(-b+\sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Vậy đặt : - Tổng nghiệm là S : S = $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

- Tích nghiệm là P : P = $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

Như vậy ta thấy giữa hai nghiệm của phương trình (*) có liên quan chặt chẽ với các hệ số *a, b, c*. Đây chính là nội dung của Định lí VI-ÉT, sau đây ta tìm hiểu một số ứng dụng của định lí này trong giải toán.

I. NHẨM NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH :

1. Dạng đặc biệt:

Xét phương trình (*) ta thấy :

a) Nếu cho $x = 1$ thì ta có (*) ⇔ $a.1^2 + b.1 + c = 0$ ⇔ $a + b + c = 0$

Như vậy phương trình có một nghiệm $x_1 = 1$ và nghiệm còn lại là $x_2 = \frac{c}{a}$

b) Nếu cho $x = -1$ thì ta có (*) ⇔ $a.(-1)^2 + b(-1) + c = 0$ ⇔ $a - b + c = 0$

Như vậy phương trình có một nghiệm là $x_1 = -1$ và nghiệm còn lại là $x_2 = \frac{-c}{a}$

Ví dụ: Dùng hệ thức VI-ÉT để nhẩm nghiệm của các phương trình sau:

1) $2x^2 + 5x + 3 = 0$ (1) 2) $3x^2 + 8x - 11 = 0$ (2)

Ta thấy :

Phương trình (1) có dạng $a - b + c = 0$ nên có nghiệm $x_1 = -1$ và $x_2 = \frac{-3}{2}$

Phương trình (2) có dạng $a + b + c = 0$ nên có nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = \frac{-11}{3}$

Bài tập áp dụng: Hãy tìm nhanh nghiệm của các phương trình sau:

1. $35x^2 - 37x + 2 = 0$ 2. $7x^2 + 500x - 507 = 0$
3. $x^2 - 49x - 50 = 0$ 4. $4321x^2 + 21x - 4300 = 0$

2. Cho phương trình , có một hệ số chưa biết, cho trước một nghiệm tìm nghiệm còn lại và chỉ ra hệ số của phương trình :

Vídụ: a) Phương trình $x^2 - 2px + 5 = 0$. Có một nghiệm bằng 2, tìm p và nghiệm thứ hai.

b) Phương trình $x^2 + 5x + q = 0$ có một nghiệm bằng 5, tìm q và nghiệm thứ hai.

c) Cho phương trình : $x^2 - 7x + q = 0$, biết hiệu 2 nghiệm bằng 11. Tìm q và hai nghiệm của phương trình.

d) Tìm q và hai nghiệm của phương trình : $x^2 - qx + 50 = 0$, biết phương trình có 2 nghiệm và có một nghiệm bằng 2 lần nghiệm kia.

Bài giải:

a) Thay $x_1 = 2$ v à phương trình ban đ ầu ta đ ư ợc :

$$4 - 4p + 5 = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{4}$$

T ừ $x_1 x_2 = 5$ suy ra $x_2 = \frac{5}{x_1} = \frac{5}{2}$

b) Thay $x_1 = 5$ v à phương trình ban đ ầu ta đ ư ợc

$25+25+q=0 \Rightarrow q=-50$

T ừ $x_1x_2=-50$ suy ra $x_2=\dfrac{-50}{x_1}=\dfrac{-50}{5}=-10$

c) Vì vai trò của x_1 và x_2 bình đẳng nên theo đề bài giả sử $x_1-x_2=11$ và theo VI-ÉT ta có $x_1+x_2=7$, ta giải hệ sau: $\begin{cases} x_1-x_2=11 \\ x_1+x_2=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=9 \\ x_2=-2 \end{cases}$

Suy ra $q=x_1x_2=-18$

d) Vì vai trò của x_1 và x_2 bình đẳng nên theo đề bài giả sử $x_1=2x_2$ và theo VI-ÉT ta có $x_1x_2=50$. Suy ra

$2x_2^2=50 \Leftrightarrow x_2^2=5^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_2=-5 \\ x_2=5 \end{array}\right.$

Với $x_2=-5$ th ì $x_1=-10$

Với $x_2=5$ th ì $x_1=10$

II. LẬP PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. Lập phương trình bậc hai khi biết hai nghiệm $x_1;x_2$

Ví du : Cho $x_1=3$; $x_2=2$ lập một phương trình bậc hai chứa hai nghiệm trên

Theo hệ thức VI-ÉT ta có $\begin{cases} S=x_1+x_2=5 \\ P=x_1x_2=6 \end{cases}$ vậy $x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình có dạng:

$x^2-Sx+P=0 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0$

Bài tập áp dụng:

1. $x_1 = 8$ và $x_2 = -3$
2. $x_1 = 3a$ và $x_2 = a$
3. $x_1 = 36$ và $x_2 = -104$
4. $x_1 = 1+\sqrt{2}$ và $x_2 = 1-\sqrt{2}$

2. Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm thoả mãn biểu thức chứa hai nghiệm của một phương trình cho trước:

V í dụ: Cho phương trình : $x^2-3x+2=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1;x_2$. Không giải phương trình trên, hãy lập phương trình bậc 2 có ẩn là y thoả mãn : $y_1=x_2+\dfrac{1}{x_1}$ và $y_2=x_1+\dfrac{1}{x_2}$

Theo h ệ th ức VI- ÉT ta c ó:

$$S=y_1+y_2=x_2+\frac{1}{x_1}+x_1+\frac{1}{x_2}=(x_1+x_2)+\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)=(x_1+x_2)+\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$$

$$P=y_1y_2=(x_2+\frac{1}{x_1})(x_1+\frac{1}{x_2})=x_1x_2+1+1+\frac{1}{x_1x_2}=2+1+1+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$$

Vậy phương trình cần lập có dạng: $y^2-Sy+P=0$

hay $y^2-\dfrac{9}{2}y+\dfrac{9}{2}=0 \Leftrightarrow 2y^2-9y+9=0$

Bài tập áp dụng:

1/ Cho phương trình $3x^2+5x-6=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1;x_2$. Không giải phương trình, Hãy lập phương trình bậc hai có các nghiệm $y_1=x_1+\frac{1}{x_2}$ và $y_2=x_2+\frac{1}{x_1}$

(Đáp số: $y^2+\frac{5}{6}y-\frac{1}{2}=0$ hay $6y^2+5y-3=0$)

2/ Cho phương trình : $x^2-5x-1=0$ có 2 nghiệm $x_1;x_2$. Hãy lập phương trình bậc 2 có ẩn y thoả mãn $y_1=x_1^4$ và $y_2=x_2^4$ (có nghiệm là luỹ thừa bậc 4 của các nghiệm của phương trình đã cho).

(Đáp số : $y^2-727y+1=0$)

3/ Cho phương trình bậc hai: $x^2-2x-m^2=0$ có các nghiệm $x_1;x_2$. Hãy lập phương trình bậc hai có các nghiệm $y_1;y_2$ sao cho :

a) $y_1=x_1-3$ và $y_2=x_2-3$ b) $y_1=2x_1-1$ và $y_2=2x_2-1$

(Đáp số a) $y^2-4y+3-m^2=0$ b) $y^2-2y-(4m^2-3)=0$)

III. TÌM HAI SỐ BIẾT TỔNG VÀ TÍCH CỦA CHÚNG

Nếu hai số có Tổng bằng S và Tích bằng P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình :

$x^2-Sx+P=0$ (điều kiện để có hai số đó là $S^2-4P\ge 0$)

Ví dụ : Tìm hai số a, b biết tổng S = a + b = −3 và tích P = ab = −4

Vì a + b = −3 và ab = −4 n ên a, b là nghiệm của phương trình : $x^2+3x-4=0$

giải phương trình trên ta được $x_1=1$ và $x_2=-4$

Vậy nếu a = 1 thì b = −4

nếu a = −4 thì b = 1

Bài tập áp dụng: Tìm 2 số a và b biết Tổng S và Tích P

1. S = 3 và P = 2
2. S = −3 và P = 6
3. S = 9 và P = 20
4. S = 2x và P = x^2-y^2

Bài tập nâng cao: Tìm 2 số a và b biết

1. a + b = 9 và $a^2+b^2=41$
2. a − b = 5 và ab = 36
3. $a^2+b^2=61$ v à ab = 30

Hướng dẫn: 1) Theo đề bài đã biết tổng của hai số a và b , vậy để áp dụng hệ thức VI- ÉT thì cần tìm tích của a v à b.

T ừ $a+b=9\Rightarrow(a+b)^2=81\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2=81\Leftrightarrow ab=\frac{81-(a^2+b^2)}{2}=20$

Suy ra : a, b là nghiệm của phương trình có dạng : $x^2-9x+20=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=4\\x_2=5\end{array}\right.$

Vậy: Nếu a = 4 thì b = 5

nếu a = 5 thì b = 4

2) Đã biết tích: ab = 36 do đó cần tìm tổng : a + b

Cách 1: Đ ặt c = −b ta có : a + c = 5 và a.c = −36

Suy ra a,c là nghiệm của phương trình : $x^2-5x-36=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-4 \\ x_2=9 \end{array}\right.$

Do đó nếu a = −4 thì c = 9 nên b = −9

nếu a = 9 thì c = −4 nên b = 4

Cách 2: Từ $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab \Rightarrow (a+b)^2=(a-b)^2+4ab=169$

$\Rightarrow (a+b)^2=13^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=-13 \\ a+b=13 \end{array}\right.$

*) Với $a+b=-13$ và ab = 36, nên a, b là nghiệm của phương trình : $x^2+13x+36=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-4 \\ x_2=-9 \end{array}\right.$

Vậy a = −4 thì b = −9

*) Với $a+b=13$ và ab = 36, nên a, b là nghiệm của phương trình : $x^2-13x+36=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=4 \\ x_2=9 \end{array}\right.$

Vậy a = 9 thì b = 4

3) Đã biết ab = 30, do đó cần tìm a + b:

T ừ: $a^2+b^2=61 \Rightarrow (a+b)^2=a^2+b^2+2ab=61+2.30=121=11^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=-11 \\ a+b=11 \end{array}\right.$

*) Nếu $a+b=-11$ và ab = 30 thì a, b là hai nghiệm của phương trình: $x^2+11x+30=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-5 \\ x_2=-6 \end{array}\right.$

Vậy nếu a = −5 thì b = −6 ; nếu a = −6 thì b = −5

*) Nếu $a+b=11$ và ab = 30 thì a, b là hai nghiệm của phương trình : $x^2-11x+30=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=5 \\ x_2=6 \end{array}\right.$

Vậy nếu a = 5 thì b = 6 ; nếu a = 6 thì b = 5.

IV. TÍNH GIÁ TRỊ CỦA CÁC BIỂU THỨC NGHIỆM

Đối các bài toán dạng này điều quan trọng nhất là phải biết biến đổi biểu thức nghiệm đã cho về biểu thức có chứa tổng nghiệm S và tích nghiệm P để áp dụng hệ thức VI-ÉT rồi tính giá trị của biểu thức

1. Biến đổi biểu thức để làm xuất hiện : (x_1+x_2) và x_1x_2

Ví dụ 1

a) $x_1^2+x_2^2=(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

b) $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=(x_1+x_2)\left[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right]$

c) $x_1^4+x_2^4=(x_1^2)^2+(x_2^2)^2=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2=\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]^2-2x_1^2x_2^2$

d) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}$

Ví dụ 2 $x_1-x_2=?$

Ta biết $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2 \Rightarrow x_1-x_2=\pm\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

Từ các biểu thức đã biến đổi trên hãy biến đổi các biểu thức sau:

1. $x_1^2-x_2^2$ ($=(x_1-x_2)(x_1+x_2)=$…….)
2. $x_1^3-x_2^3$ ($=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)=(x_1-x_2)\left[(x_1+x_2)^2-x_1x_2\right]$ =…….)

3. $x_1^4 - x_2^4$ $\quad (= \left(x_1^2 + x_2^2\right)\left(x_1^2 - x_2^2\right) = \ldots\ldots)$

4. $x_1^6 + x_2^6$ $\quad (= (x_1^2)^3 + (x_2^2)^3 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)\left(x_1^4 - x_1^2x_2^2 + x_2^4\right) = \ldots\ldots\ldots)$

Bài tập áp dụng

5. $x_1^6 - x_2^6$ 6. $x_1^5 + x_2^5$ 7. $x_1^7 + x_2^7$ 8. $\dfrac{1}{x_1 - 1} + \dfrac{1}{x_2 - 1}$

2. Không giải phương trình, tính giá trị của biểu thức nghiệm

a) Cho phương trình : $x^2 - 8x + 15 = 0$ Không giải phương trình, hãy tính

1. $x_1^2 + x_2^2$ (34) 2. $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$ $\left(\dfrac{8}{15}\right)$

3. $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1}$ $\left(\dfrac{34}{15}\right)$ 4. $\left(x_1 + x_2\right)^2$ (46)

b) Cho phương trình : $8x^2 - 72x + 64 = 0$ Không giải phương trình, hãy tính:

1. $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$ $\left(\dfrac{9}{8}\right)$ 2. $x_1^2 + x_2^2$ (65)

c) Cho phương trình : $x^2 - 14x + 29 = 0$ Không giải phương trình, hãy tính:

1. $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$ $\left(\dfrac{14}{29}\right)$ 2. $x_1^2 + x_2^2$ (138)

d) Cho phương trình : $2x^2 - 3x + 1 = 0$ Không giải phương trình, hãy tính:

1. $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$ (3) 2. $\dfrac{1 - x_1}{x_1} + \dfrac{1 - x_2}{x_2}$ (1)

3. $x_1^2 + x_2^2$ (1) 4. $\dfrac{x_1}{x_2 + 1} + \dfrac{x_2}{x_1 + 1}$ $\left(\dfrac{5}{6}\right)$

e) Cho phương trình $x^2 - 4\sqrt{3}x + 8 = 0$ có 2 nghiệm $x_1 ; x_2$, không giải phương trình, tính

$$Q = \frac{6x_1^2 + 10x_1x_2 + 6x_2^2}{5x_1x_2^3 + 5x_1^3x_2}$$

HD: $Q = \dfrac{6x_1^2 + 10x_1x_2 + 6x_2^2}{5x_1x_2^3 + 5x_1^3x_2} = \dfrac{6(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{5x_1x_2\left[\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2\right]} = \dfrac{6.(4\sqrt{3})^2 - 2.8}{5.8\left[(4\sqrt{3})^2 - 2.8\right]} = \dfrac{17}{80}$

V. TÌM HỆ THỨC LIÊN HỆ GIỮA HAI NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH SAO CHO HAI NGHIỆM NÀY KHÔNG PHỤ THUỘC (HAY ĐỘC LẬP) VỚI THAM SỐ

Để làm các bài toán loại này, ta làm lần lượt theo các bước sau:

- Đặt điều kiện cho tham số để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1 và x_2 (thường là $a \neq 0$ và $\Delta \geq 0$)
- Áp dụng hệ thức VI-ÉT viết $S = x_1 + x_2$ v à $P = x_1 x_2$ theo tham số
- Dùng quy tắc cộng hoặc thế để tính tham số theo x_1 và x_2 . Từ đó đưa ra hệ thức liên hệ giữa các nghiệm x_1 và x_2.

Ví dụ 1: Cho phương trình : $\left(m-1\right)x^2-2mx+m-4=0$ có 2 nghiệm $x_1;x_2$. Lập hệ thức liên hệ giữa $x_1;x_2$ sao cho chúng không phụ thuộc vào m.

Để phương trình trên có 2 nghiệm x_1 và x_2 th ì :

$$\begin{cases} m-1\neq 0 \\ □'\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ m^2-(m-1)(m-4)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ 5m-4\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ m\geq \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

Theo hệ th ức VI- ÉT ta có :

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2m}{m-1} \\ x_1.x_2=\dfrac{m-4}{m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=2+\dfrac{2}{m-1} (1) \\ x_1.x_2=1-\dfrac{3}{m-1} (2) \end{cases}$$

Rút m từ (1) ta có :

$$\frac{2}{m-1}=x_1+x_2-2 \Leftrightarrow m-1=\frac{2}{x_1+x_2-2} \qquad (3)$$

Rút m từ (2) ta có :

$$\frac{3}{m-1}=1-x_1x_2 \Leftrightarrow m-1=\frac{3}{1-x_1x_2} \qquad (4)$$

Đồng nhất các vế của (3) và (4) ta có:

$$\frac{2}{x_1+x_2-2}=\frac{3}{1-x_1x_2} \Leftrightarrow 2\left(1-x_1x_2\right)=3\left(x_1+x_2-2\right) \Leftrightarrow 3\left(x_1+x_2\right)+2x_1x_2-8=0$$

Ví dụ 2: Gọi $x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình : $\left(m-1\right)x^2-2mx+m-4=0$. Chứng minh rằng biểu thức $A=3\left(x_1+x_2\right)+2x_1x_2-8$ không phụ thuộc giá trị của m.

Để phương trình trên có 2 nghiệm x_1 và x_2 th ì :

$$\begin{cases} m-1\neq 0 \\ □'\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ m^2-(m-1)(m-4)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ 5m-4\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ m\geq \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

Theo hệ thức VI- ÉT ta c ó :

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2m}{m-1} \\ x_1.x_2=\dfrac{m-4}{m-1} \end{cases} \quad \text{thay v ào A ta c ó:}$$

$$A=3\left(x_1+x_2\right)+2x_1x_2-8=3.\frac{2m}{m-1}+2.\frac{m-4}{m-1}-8=\frac{6m+2m-8-8(m-1)}{m-1}=\frac{0}{m-1}=0$$

Vậy A = 0 với mọi $m\neq 1$ và $m\geq \frac{4}{5}$. Do đó biểu thức A không phụ thuộc vào m

Nhận xét:

- Lưu ý điều kiện cho tham số để phương trình đã cho có 2 nghiệm

- Sau đó dựa vào hệ thức VI-ÉT rút tham số theo tổng nghiệm, theo tích nghiệm sau đó đồng nhất các vế ta sẽ được một biểu thức chứa nghiệm không phụ thuộc vào tham số.

Bài tập áp dụng:

1. Cho phương trình : $x^2-(m+2)x+(2m-1)=0$ có 2 nghiệm $x_1;x_2$. Hãy lập hệ thức liên hệ giữa $x_1;x_2$ sao cho $x_1;x_2$ độc lập đối với *m*.

Hướng dẫn: Dễ thấy $\Delta=(m+2)^2-4(2m-1)=m^2-4m+8=(m-2)^2+4>0$

do đó phương trình đã cho luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1 và x_2

Theo hệ thức VI- ÉT ta có

$$\begin{cases} x_1+x_2=m+2 \\ x_1.x_2=2m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=x_1+x_2-2(1) \\ m=\dfrac{x_1x_2+1}{2}(2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$x_1+x_2-2=\frac{x_1x_2+1}{2} \Leftrightarrow 2(x_1+x_2)-x_1x_2-5=0$$

2. Cho phương trình : $x^2+(4m+1)x+2(m-4)=0$.

Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1 và x_2 sao cho chúng không phụ thuộc vào *m*.

Hướng dẫn: Dễ thấy $\Delta=(4m+1)^2-4.2(m-4)=16m^2+33>0$ do đó phương trình đã cho luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1 và x_2

Theo hệ thức VI- ÉT ta có

$$\begin{cases} x_1+x_2=-(4m+1) \\ x_1.x_2=2(m-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m=-(x_1+x_2)-1(1) \\ 4m=2x_1x_2+16(2) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$-(x_1+x_2)-1=2x_1x_2+16 \Leftrightarrow 2x_1x_2+(x_1+x_2)+17=0$$

VI.TÌM GIÁ TRỊ THAM SỐ CỦA PHƯƠNG TRÌNH THOẢ MÃN BIỂU THỨC CHỨA NGHIỆM ĐÃ CHO

Đối với các bài toán dạng này, ta làm như sau:

- Đặt điều kiện cho tham số để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1 và x_2 (thường là $a \neq 0$ và $\Delta \geq 0$)
- Từ biểu thức nghiệm đã cho, áp dụng hệ thức VI-ÉT để giải phương trình (có ẩn là tham số).
- Đối chiếu với điều kiện xác định của tham số để xác định giá trị cần tìm.

Ví dụ 1: Cho phương trình : $mx^2-6(m-1)x+9(m-3)=0$

Tìm giá trị của tham số *m* để 2 nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn hệ thức : $x_1+x_2=x_1.x_2$

Bài giải: Điều kiện để phương trình c ó 2 nghiệm x_1 và x_2 l à :

$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = \left[3(m-21)\right]^2 - 9(m-3)m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = 9\left(m^2 - 2m + 1\right) - 9m^2 + 27 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = 9(m-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \geq -1 \end{cases}$

Theo h ệ th ức VI- ÉT ta c ó: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{6(m-1)}{m} \\ x_1 x_2 = \dfrac{9(m-3)}{m} \end{cases}$ v à t ừ gi ả thi ết: $x_1 + x_2 = x_1 x_2$. Suy ra:

$$\frac{6(m-1)}{m} = \frac{9(m-3)}{m} \Leftrightarrow 6(m-1) = 9(m-3) \Leftrightarrow 6m - 6 = 9m - 27 \Leftrightarrow 3m = 21 \Leftrightarrow m = 7$$

(thoả mãn điều kiện xác định)

Vậy với m = 7 thì phương trình đã cho có 2 nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn hệ thức : $x_1 + x_2 = x_1.x_2$

__*Ví dụ 2:*__ Cho phương trình : $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 2 = 0$.

Tìm *m* để 2 nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn hệ thức : $3x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 7 = 0$

Bài giải: Điều kiện để phương trình có 2 nghiệm $x_1 \& x_2$ là :

$\Delta' = (2m+1)^2 - 4(m^2+2) \geq 0$

$\Leftrightarrow 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 8 \geq 0$

$\Leftrightarrow 4m - 7 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \dfrac{7}{4}$

Theo hệ thức VI-ÉT ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 1 \\ x_1x_2 = m^2 + 2 \end{cases}$ và từ giả thiết $3x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 7 = 0$. Suy ra

$3(m^2+2) - 5(2m+1) + 7 = 0$

$\Leftrightarrow 3m^2 + 6 - 10m - 5 + 7 = 0$

$\Leftrightarrow 3m^2 - 10m + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2(TM) \\ m = \dfrac{4}{3}(KTM) \end{array}\right.$

Vậy với m = 2 thì phương trình có 2 nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn hệ thức : $3x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 7 = 0$

__Bài tập áp dụng__

1. Cho phương trình : $mx^2 + 2(m-4)x + m + 7 = 0$

   Tìm *m* để 2 nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn hệ thức : $x_1 - 2x_2 = 0$

2. Cho phương trình : $x^2 + (m-1)x + 5m - 6 = 0$

   Tìm *m* để 2 nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn hệ thức: $4x_1 + 3x_2 = 1$

3. Cho phương trình : $3x^2 - (3m-2)x - (3m+1) = 0$.

   Tìm *m* để 2 nghiệm x_1 và x_2 thoả mãn hệ thức : $3x_1 - 5x_2 = 6$

__Hướng dẫn cách giải:__

Đối với các bài tập dạng này ta thấy có một điều khác biệt so với bài tập ở Ví dụ 1 và ví dụ 2 ở chỗ

+ Trong ví dụ thì biểu thức nghiệm đã chứa sẵn tổng nghiệm $x_1 + x_2$ và tích nghiệm x_1x_2 nên ta có thể vận dụng trực tiếp hệ thức VI-ÉT để tìm tham số *m*.
+ Còn trong 3 bài tập trên thì các biểu thức nghiệm lại không cho sẵn như vậy, do đó vấn đề đặt ra ở đây là làm thế nào để từ biểu thức đã cho biến đổi về biểu thức có chứa tổng nghiệm $x_1 + x_2$ và tích nghiệm x_1x_2 rồi từ đó vận dụng tương tự cách làm đã trình bày ở Ví dụ 1 và ví dụ 2.

BT1: - ĐKX Đ: $m \neq 0 \,\&\, m \leq \frac{16}{15}$

-Theo VI-ÉT: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-(m-4)}{m} \\ x_1x_2 = \frac{m+7}{m} \end{cases}$ (1)

- Từ $x_1 - 2x_2 = 0$ Suy ra: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3x_2 \\ 2(x_1 + x_2) = 3x_1 \end{cases} \Rightarrow 2(x_1 + x_2)^2 = 9x_1x_2$ (2)

- Thế (1) vào (2) ta đưa được về phương trình sau: $m^2 + 127m - 128 = 0 \Rightarrow m_1 = 1; m_2 = -128$

BT2: - ĐKXĐ: $\Delta = m^2 - 22m + 25 \geq 0 \Leftrightarrow 11 - \sqrt{96} \leq m \leq 11 + \sqrt{96}$

- Theo VI-ÉT: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - m \\ x_1x_2 = 5m - 6 \end{cases}$ (1)

- Từ : $4x_1 + 3x_2 = 1$. Suy ra: $\begin{cases} x_1 = 1 - 3(x_1 + x_2) \\ x_2 = 4(x_1 + x_2) - 1 \end{cases} \Rightarrow x_1x_2 = [1 - 3(x_1 + x_2)].[4(x_1 + x_2) - 1]$ (2)

$\Leftrightarrow x_1x_2 = 7(x_1 + x_2) - 12(x_1 + x_2)^2 - 1$

- Thế (1) vào (2) ta có phương trình : $12m(m-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right.$ (thoả mãn ĐKXĐ)

BT3: - Vì $\Delta = (3m-2)^2 + 4.3(3m+1) = 9m^2 + 24m + 16 = (3m+4)^2 \geq 0$ với mọi số thực m nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt.

- -Theo VI-ÉT: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{3m-2}{3} \\ x_1x_2 = \frac{-(3m+1)}{3} \end{cases}$ (1)

- Từ giả thiết: $3x_1 - 5x_2 = 6$. Suy ra: $\begin{cases} 8x_1 = 5(x_1 + x_2) + 6 \\ 8x_2 = 3(x_1 + x_2) - 6 \end{cases} \Rightarrow 64x_1x_2 = [5(x_1 + x_2) + 6].[3(x_1 + x_2) - 6]$ (2)

$\Leftrightarrow 64x_1x_2 = 15(x_1 + x_2)^2 - 12(x_1 + x_2) - 36$

- Thế (1) vào (2) ta được phương trình: $m(45m + 96) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -\frac{32}{15} \end{array}\right.$ (thoả mãn)

VII. XÁC ĐỊNH DẤU CÁC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Cho phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ (a ≠ 0) .Hãy tìm điều kiện để phương trình có 2 nghiệm: ***trái dấu, cùng dấu, cùng dương, cùng âm ….***

Ta lập bảng xét dấu sau:

Dấu nghiệm	x_1	x_2	$S = x_1 + x_2$	$P = x_1x_2$	Δ	Điều kiện chung
trái dấu	$\pm$	$\mp$		$P < 0$	$\Delta \ge 0$	$\Delta \ge 0$; $P < 0$.
cùng dấu,	$\pm$	$\pm$		$P > 0$	$\Delta \ge 0$	$\Delta \ge 0$; $P > 0$
cùng dương,	+	+	$S > 0$	$P > 0$	$\Delta \ge 0$	$\Delta \ge 0$; $P > 0$; $S > 0$
cùng âm	–	–	$S < 0$	$P > 0$	$\Delta \ge 0$	$\Delta \ge 0$; $P > 0$; $S < 0$.

Ví dụ: *Xác định tham số m sao cho phương trình:*

$2x^2 - (3m+1)x + m^2 - m - 6 = 0$ có 2 nghiệm trái dấu.

Để phương trình có 2 nghiệm trái dấu thì

$$\begin{cases} \Delta \ge 0 \\ P < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (3m+1)^2 - 4.2.(m^2 - m - 6) \ge 0 \\ P = \dfrac{m^2 - m - 6}{2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-7)^2 \ge 0 \forall m \\ P = (m-3)(m+2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 3$$

Vậy với $-2 < m < 3$ thì phương trình có 2 nghi ệm trái dấu.

Bài tập tham khảo:

1. $mx^2 - 2(m+2)x + 3(m-2) = 0$ có 2 nghiệm cùng dấu.
2. $3mx^2 + 2(2m+1)x + m = 0$ có 2 nghiệm âm.
3. $(m-1)x^2 + 2x + m = 0$ có ít nhất một nghiệm không âm.

VIII. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT HOẶC GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC NGHIỆM

Áp dụng tính chất sau về bất đẳng thức: trong mọi trường hợp nếu ta luôn phân tích được:

$C = \left[\begin{array}{l} A + m \\ k - B \end{array}\right.$ (trong đó A, B là các biểu thức không âm ; m, k là hằng số) (*)

Thì ta thấy : $C \ge m$ (v ì $A \ge 0$) $\Rightarrow \min C = m \Leftrightarrow A = 0$

$C \le k$ (v ì $B \ge 0$) $\Rightarrow \max C = k \Leftrightarrow B = 0$

Ví dụ 1: Cho phương trình : $x^2 + (2m-1)x - m = 0$

Gọi x_1 và x_2 là các nghiệm của phương trình. Tìm *m* để :

$A = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2$ có giá trị nhỏ nhất.

Bài giải: Theo VI-ÉT: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -(2m-1) \\ x_1x_2 = -m \end{cases}$

Theo đ ề b ài : $A = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 8x_1x_2$

$$=(2m-1)^2+8m$$
$$=4m^2-12m+1$$
$$=(2m-3)^2-8\geq -8$$

Suy ra: $\min A=-8\Leftrightarrow 2m-3=0\ \ hay\ \ m=\dfrac{3}{2}$

Ví dụ 2: Cho phương trình : $x^2-mx+m-1=0$

Gọi x_1 và x_2 là các nghiệm của phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$B=\frac{2x_1x_2+3}{x_1^2+x_2^2+2\left(x_1x_2+1\right)}$$

Ta có: Theo hệ thức VI-ÉT thì : $\begin{cases}x_1+x_2=m\\ x_1x_2=m-1\end{cases}$

$$\Rightarrow B=\frac{2x_1x_2+3}{x_1^2+x_2^2+2\left(x_1x_2+1\right)}=\frac{2x_1x_2+3}{(x_1+x_2)^2+2}=\frac{2(m-1)+3}{m^2+2}=\frac{2m+1}{m^2+2}$$

Cách 1: Thêm bớt để đưa về dạng như phần (*) đã hướng dẫn
Ta biến đổi B như sau:

$$B=\frac{m^2+2-\left(m^2-2m+1\right)}{m^2+2}=1-\frac{(m-1)^2}{m^2+2}$$

Vì $(m-1)^2\geq 0\Rightarrow \dfrac{(m-1)^2}{m^2+2}\geq 0\Rightarrow B\leq 1$

Vậy max B=1 $\Leftrightarrow$ $m=1$

Với cách thêm bớt khác ta lại có:

$$B=\frac{\frac{1}{2}m^2+2m+1-\frac{1}{2}m^2}{m^2+2}=\frac{\frac{1}{2}\left(m^2+4m+4\right)-\frac{1}{2}\left(m^2+2\right)}{m^2+2}=\frac{(m+2)^2}{2\left(m^2+2\right)}-\frac{1}{2}$$

Vì $(m+2)^2\geq 0\Rightarrow \dfrac{(m+2)^2}{2\left(m^2+2\right)}\geq 0\Rightarrow B\geq -\dfrac{1}{2}$

Vậy $\min B=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow m=-2$

Cách 2: Đưa về giải phương trình bậc 2 với ẩn là *m* và *B* là tham số, ta sẽ tìm điều kiện cho tham số *B* để phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi *m*.

$$B=\frac{2m+1}{m^2+2}\Leftrightarrow Bm^2-2m+2B-1=0$$ (Với *m* là ẩn, *B* là tham số) (**)

Ta có: $\Delta=1-B(2B-1)=1-2B^2+B$

Để phương trình (**) luôn có nghiệm với mọi m thì $\Delta\geq 0$

hay $-2B^2+B+1\geq 0\Leftrightarrow 2B^2-B-1\leq 0\Leftrightarrow (2B+1)(B-1)\leq 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2B+1\le 0\\ B-1\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}2B+1\ge 0\\ B-1\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}B\le -\frac{1}{2}\\ B\ge 1\end{cases}\\ \begin{cases}B\ge -\frac{1}{2}\\ B\le 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le B\le 1$$

Vậy: max B=1 $\Leftrightarrow m=1$

$\min B=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow m=-2$

Bài tập áp dụng

1. Cho phương trình : $x^2+(4m+1)x+2(m-4)=0$.Tìm m để biểu thức $A=(x_1-x_2)^2$ có giá trị nhỏ nhất.

2. Cho phương trình $x^2-2(m-1)x-3-m=0$. Tìm m sao cho nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1^2+x_2^2\ge 10$.

3. Cho phương trình : $x^2-2(m-4)x+m^2-8=0$ xác định m để phương trình có 2 nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn

a) $A=x_1+x_2-3x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất

b) $B=x_1^2+x_2^2-x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất

4. Cho phương trình : $x^2-(m-1)x-m^2+m-2=0$. Với giá trị nào của m, biểu thức $C=x_1^2+x_2^2$ dạt giá trị nhỏ nhất.

5. Cho phương trình $x^2+(m+1)+m=0$. Xác định m để biểu thức $E=x_1^2+x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

C. KẾT LUẬN

Do thời gian có hạn và mục đích chính của chuyên đề là áp dụng cho học sinh đại trà, riêng mục VII và VIII dành cho học sinh khá giỏi nên lượng bài tập còn đơn giản và chưa thật sự đa dạng, đầy đủ, do đó không tránh khỏi thiếu sót, rât mong các đồng nghiệp tham gia góp ý xây dựng để chuyên đề của chúng tôi có khả năng áp dụng rộng rãi và có tính thiết thực hơn!

Chúng tôi xin chân thành cảm ơn!

Thanh Lãng, ngày 15 tháng 3 năm 2008.

Người viết

Ngô Quốc Hưng
Dương Thế Nam