TRẦN SĨ TÙNG

BÀI TẬP

KHẢO SÁT HÀM SỐ

TÀI LIỆU ÔN THI ĐẠI HỌC – CAO ĐẲNG

Năm 2012

KSHS 01: TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

A. Kiến thức cơ bản

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D.

• Hàm số *f* đồng biến trên D $\Leftrightarrow$ $y' \ge 0, \forall x \in D$ và $y' = 0$ chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm thuộc D.

• Hàm số *f* nghịch biến trên D $\Leftrightarrow$ $y' \le 0, \forall x \in D$ và $y' = 0$ chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm thuộc D.

• Nếu $y' = ax^2 + bx + c \ (a \ne 0)$ thì:

+ $y' \ge 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}$ + $y' \le 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}$

• Định lí về dấu của tam thức bậc hai $g(x) = ax^2 + bx + c \ (a \ne 0)$:

+ Nếu $\Delta < 0$ thì $g(x)$ luôn cùng dấu với *a*.

+ Nếu $\Delta = 0$ thì $g(x)$ luôn cùng dấu với *a* (trừ $x = -\frac{b}{2a}$)

+ Nếu $\Delta > 0$ thì $g(x)$ có hai nghiệm x_1, x_2 và trong khoảng hai nghiệm thì $g(x)$ khác dấu với *a*, ngoài khoảng hai nghiệm thì $g(x)$ cùng dấu với *a*.

• So sánh các nghiệm x_1, x_2 của tam thức bậc hai $g(x) = ax^2 + bx + c$ với số 0:

+ $x_1 \le x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$ + $0 < x_1 \le x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$ + $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P < 0$

• $g(x) \le m, \forall x \in (a;b) \Leftrightarrow \max\limits_{(a;b)} g(x) \le m$; $g(x) \ge m, \forall x \in (a;b) \Leftrightarrow \min\limits_{(a;b)} g(x) \ge m$

B. Một số dạng câu hỏi thường gặp

1. Tìm điều kiện để hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên tập xác định (hoặc trên từng khoảng xác định).

• Hàm số *f* đồng biến trên D $\Leftrightarrow$ $y' \ge 0, \forall x \in D$ và $y' = 0$ chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm thuộc D.

• Hàm số *f* nghịch biến trên D $\Leftrightarrow$ $y' \le 0, \forall x \in D$ và $y' = 0$ chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm thuộc D.

• Nếu $y' = ax^2 + bx + c \ (a \ne 0)$ thì:

+ $y' \ge 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}$ + $y' \le 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}$

2. Tìm điều kiện để hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên khoảng $(\alpha;\beta)$.

Ta có: $y' = f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

a) Hàm số *f* đồng biến trên $(\alpha;\beta)$ $\Leftrightarrow$ $y' \ge 0, \forall x \in (\alpha;\beta)$ và $y' = 0$ chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm thuộc $(\alpha;\beta)$.

Trường hợp 1:

• Nếu bất phương trình $f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow h(m) \ge g(x)$ (*)

thì *f* đồng biến trên $(\alpha;\beta)$ $\Leftrightarrow$ $h(m) \ge \max\limits_{(\alpha;\beta)} g(x)$

- Nếu bất phương trình $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow h(m) \leq g(x)$ (**)

  thì f đồng biến trên $(\alpha;\beta) \Leftrightarrow h(m) \leq \min\limits_{(\alpha;\beta)} g(x)$

Trường hợp 2: Nếu bất phương trình $f'(x) \geq 0$ không đưa được về dạng (*) thì đặt $t = x - \alpha$.
Khi đó ta có: $y' = g(t) = 3at^2 + 2(3a\alpha + b)t + 3a\alpha^2 + 2b\alpha + c$.

– Hàm số f đồng biến trên khoảng $(-\infty;a) \Leftrightarrow g(t) \geq 0, \forall t < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P \geq 0 \end{cases}$

– Hàm số f đồng biến trên khoảng $(a;+\infty) \Leftrightarrow g(t) \geq 0, \forall t > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P \geq 0 \end{cases}$

b) Hàm số f nghịch biến trên $(\alpha;\beta) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (\alpha;\beta)$ và $y' = 0$ chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm thuộc $(\alpha;\beta)$.

Trường hợp 1:

- Nếu bất phương trình $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow h(m) \geq g(x)$ (*)

  thì f nghịch biến trên $(\alpha;\beta) \Leftrightarrow h(m) \geq \max\limits_{(\alpha;\beta)} g(x)$

- Nếu bất phương trình $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow h(m) \leq g(x)$ (**)

  thì f nghịch biến trên $(\alpha;\beta) \Leftrightarrow h(m) \leq \min\limits_{(\alpha;\beta)} g(x)$

Trường hợp 2: Nếu bất phương trình $f'(x) \leq 0$ không đưa được về dạng (*) thì đặt $t = x - \alpha$.
Khi đó ta có: $y' = g(t) = 3at^2 + 2(3a\alpha + b)t + 3a\alpha^2 + 2b\alpha + c$.

– Hàm số f nghịch biến trên khoảng $(-\infty;a) \Leftrightarrow g(t) \leq 0, \forall t < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P \geq 0 \end{cases}$

– Hàm số f nghịch biến trên khoảng $(a;+\infty) \Leftrightarrow g(t) \leq 0, \forall t > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P \geq 0 \end{cases}$

3. Tìm điều kiện để hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên khoảng có độ dài bằng *k* cho trước.

- f đơn điệu trên khoảng $(x_1;x_2) \Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ (1)
- Biến đổi $|x_1 - x_2| = d$ thành $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = d^2$ (2)
- Sử dụng định lí Viet đưa (2) thành phương trình theo *m*.
- Giải phương trình, so với điều kiện (1) để chọn nghiệm.

4. Tìm điều kiện để hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ (2), $(a, d \neq 0)$

a) Đồng biến trên $(-\infty;\alpha)$.

b) Đồng biến trên $(\alpha;+\infty)$.

c) Đồng biến trên $(\alpha;\beta)$.

Tập xác định: $D = R\setminus\left\{\frac{-e}{d}\right\}$, $y' = \frac{adx^2+2aex+be-dc}{(dx+e)^2} = \frac{f(x)}{(dx+e)^2}$

Trường hợp 1	Trường hợp 2
Nếu: $f(x)\ge 0 \Leftrightarrow g(x)\ge h(m)$ (i)	Nếu bpt: $f(x)\ge 0$ không đưa được về dạng (i) thì ta đặt: $t = x-\alpha$. Khi đó bpt: $f(x)\ge 0$ trở thành: $g(t)\ge 0$, với: $g(t) = adt^2+2a(d\alpha+e)t+ad\alpha^2+2ae\alpha+be-dc$
a) (2) đồng biến trên khoảng $(-\infty;\alpha)$ $\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{-e}{d}\ge\alpha\\ g(x)\ge h(m),\forall x<\alpha\end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{-e}{d}\ge\alpha\\ h(m)\le \min\limits_{(-\infty;\alpha]} g(x)\end{cases}$	a) (2) đồng biến trên khoảng $(-\infty;\alpha)$ $\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{-e}{d}\ge\alpha\\ g(t)\ge 0,\forall t<0 \quad (ii)\end{cases}$ $(ii)\Leftrightarrow \begin{cases}a>0\\ \Delta\le 0\end{cases} \vee \begin{cases}a>0\\ \Delta>0\\ S>0\\ P\ge 0\end{cases}$
b) (2) đồng biến trên khoảng $(\alpha;+\infty)$ $\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{-e}{d}\le\alpha\\ g(x)\ge h(m),\forall x>\alpha\end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{-e}{d}\le\alpha\\ h(m)\le \min\limits_{[\alpha;+\infty)} g(x)\end{cases}$	b) (2) đồng biến trên khoảng $(\alpha;+\infty)$ $\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{-e}{d}\le\alpha\\ g(t)\ge 0,\forall t>0 \quad (iii)\end{cases}$ $(iii)\Leftrightarrow \begin{cases}a>0\\ \Delta\le 0\end{cases} \vee \begin{cases}a>0\\ \Delta>0\\ S<0\\ P\ge 0\end{cases}$
c) (2) đồng biến trên khoảng $(\alpha;\beta)$ $\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{-e}{d}\notin(\alpha;\beta)\\ g(x)\ge h(m),\forall x\in(\alpha;\beta)\end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{-e}{d}\notin(\alpha;\beta)\\ h(m)\le \min\limits_{[\alpha;\beta]} g(x)\end{cases}$	

5. Tìm điều kiện để hàm số $y = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ (2), $(a,d\ne 0)$

a) Nghịch biến trên $(-\infty;\alpha)$.

b) Nghịch biến trên $(\alpha;+\infty)$.

c) Nghịch biến trên $(\alpha;\beta)$.

Tập xác định: $D = R\setminus\left\{\frac{-e}{d}\right\}$, $y' = \frac{adx^2+2aex+be-dc}{(dx+e)^2} = \frac{f(x)}{(dx+e)^2}$

Trường hợp 1	**Trường hợp 2**
Nếu $f(x) \le 0 \Leftrightarrow g(x) \ge h(m)$ (i)	Nếu bpt: $f(x) \ge 0$ không đưa được về dạng (i) thì ta đặt: $t = x - \alpha$. Khi đó bpt: $f(x) \le 0$ trở thành: $g(t) \le 0$, với: $g(t) = adt^2 + 2a(d\alpha + e)t + ad\alpha^2 + 2ae\alpha + be - dc$
a) (2) nghịch biến trên khoảng $(-\infty;\alpha)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-e}{d} \ge \alpha \\ g(x) \ge h(m), \forall x < \alpha \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-e}{d} \ge \alpha \\ h(m) \le \min\limits_{(-\infty;\alpha]} g(x) \end{cases}$	a) (2) đồng biến trên khoảng $(-\infty;\alpha)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-e}{d} \ge \alpha \\ g(t) \le 0, \forall t < 0 \quad (ii) \end{cases}$ $(ii) \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P \ge 0 \end{cases}$
b) (2) nghịch biến trên khoảng $(\alpha;+\infty)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-e}{d} \le \alpha \\ g(x) \ge h(m), \forall x > \alpha \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-e}{d} \le \alpha \\ h(m) \le \min\limits_{[\alpha;+\infty)} g(x) \end{cases}$	b) (2) đồng biến trên khoảng $(\alpha;+\infty)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-e}{d} \le \alpha \\ g(t) \le 0, \forall t > 0 \quad (iii) \end{cases}$ $(iii) \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P \ge 0 \end{cases}$
c) (2) đồng biến trong khoảng $(\alpha;\beta)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-e}{d} \notin (\alpha;\beta) \\ g(x) \ge h(m), \forall x \in (\alpha;\beta) \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-e}{d} \notin (\alpha;\beta) \\ h(m) \le \min\limits_{[\alpha;\beta]} g(x) \end{cases}$	

Câu 1. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}(m-1)x^3+mx^2+(3m-2)x$ (1)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1) khi $m=2$.
2) Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để hàm số (1) đồng biến trên tập xác định của nó.

• *Tập xác định: D = R.* $y'=(m-1)x^2+2mx+3m-2$.

(1) đồng biến trên R $\Leftrightarrow y'\ge 0, \forall x \Leftrightarrow m\ge 2$

Câu 2. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-mx-4$ (1)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m=0$.
2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số (1) đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

• *Tập xác định: D = R.* $y'=3x^2+6x-m$. *y' có* $\Delta'=3(m+3)$.

+ Nếu $m\le -3$ *thì* $\Delta'\le 0 \Rightarrow y'\ge 0, \forall x \Rightarrow$ *hàm số đồng biến trên R* $\Rightarrow m\le -3$ *thoả YCBT.*

+ Nếu $m>-3$ *thì* $\Delta'>0 \Rightarrow$ *PT* $y'=0$ *có 2 nghiệm phân biệt* $x_1,x_2\,(x_1<x_2)$. *Khi đó hàm số đồng biến trên các khoảng* $(-\infty;x_1),(x_2;+\infty)$.

Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0) \Leftrightarrow 0\le x_1<x_2 \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ P\ge 0\\ S>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>-3\\ -m\ge 0\\ -2>0\end{cases}$ *(VN)*

Vậy: $m\le -3$.

Câu 3. Cho hàm số $y=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1$ có đồ thị (C_m).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = 0.
2) Tìm *m* để hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$

• *Tập xác định: D = R.* $y'=6x^2-6(2m+1)x+6m(m+1)$ *có* $\Delta=(2m+1)^2-4(m^2+m)=1>0$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=m\\ x=m+1\end{array}\right.$. *Hàm số đồng biến trên các khoảng* $(-\infty;m), (m+1;+\infty)$

Do đó: hàm số đồng biến trên $(2;+\infty) \Leftrightarrow m+1\le 2 \Leftrightarrow m\le 1$

Câu 4. Cho hàm số $y=x^3+(1-2m)x^2+(2-m)x+m+2$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi *m* = 1.
2) Tìm *m* để hàm đồng biến trên khoảng $K=(0;+\infty)$.

• *Hàm đồng biến trên* $(0;+\infty) \Leftrightarrow y'=3x^2+2(1-2m)x+(2-m)\ge 0$ *với* $\forall x\in(0;+\infty)$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{3x^2+2x+2}{4x+1}\ge m \text{ với } \forall x\in(0;+\infty)$$

Ta có: $f'(x)=\frac{6(2x^2+x-1)}{(4x+1)^2}=0 \Leftrightarrow 2x^2+x-1=0 \Leftrightarrow x=-1;\ x=\frac{1}{2}$

Lập BBT của hàm $f(x)$ *trên* $(0;+\infty)$, *từ đó ta đi đến kết luận:* $f\left(\frac{1}{2}\right)\ge m \Leftrightarrow \frac{5}{4}\ge m$.

Câu hỏi tương tự:

a) $y=\frac{1}{3}(m+1)x^3-(2m-1)x^2+3(2m-1)x+1$ $(m\ne -1)$, $K=(-\infty;-1)$. *ĐS:* $m\ge \frac{4}{11}$

b) $y=\frac{1}{3}(m+1)x^3-(2m-1)x^2+3(2m-1)x+1$ $(m\ne -1)$, $K=(1;+\infty)$. *ĐS:* $m\ge 0$

c) $y=\frac{1}{3}(m+1)x^3-(2m-1)x^2+3(2m-1)x+1$ $(m\ne -1)$, $K=(-1;1)$. *ĐS:* $m\ge \frac{1}{2}$

Câu 5. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}(m^2-1)x^3 + (m-1)x^2 - 2x + 1$ (1) $(m \neq \pm 1)$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 0$.

2) Tìm m để hàm nghịch biến trên khoảng $K = (-\infty; 2)$.

• *Tập xác định: D = R;* $y' = (m^2-1)x^2 + 2(m-1)x - 2$.

Đặt $t = x - 2$ *ta được:* $y' = g(t) = (m^2-1)t^2 + (4m^2+2m-6)t + 4m^2 + 4m - 10$

Hàm số (1) nghịch biến trong khoảng $(-\infty;2) \Leftrightarrow g(t) \le 0, \forall t < 0$

TH1: $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ 3m^2 - 2m - 1 \le 0 \end{cases}$ *TH2*: $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ 3m^2 - 2m - 1 > 0 \\ 4m^2 + 4m - 10 \le 0 \\ \dfrac{-2m-3}{m+1} > 0 \end{cases}$

Vậy: Với $\frac{-1}{3} \le m < 1$ *thì hàm số (1) nghịch biến trong khoảng* $(-\infty;2)$.

Câu 6. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}(m^2-1)x^3 + (m-1)x^2 - 2x + 1$ (1) $(m \neq \pm 1)$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 0$.

2) Tìm m để hàm nghịch biến trên khoảng $K = (2; +\infty)$.

• *Tập xác định: D = R;* $y' = (m^2-1)x^2 + 2(m-1)x - 2$.

Đặt $t = x - 2$ *ta được:* $y' = g(t) = (m^2-1)t^2 + (4m^2+2m-6)t + 4m^2 + 4m - 10$

Hàm số (1) nghịch biến trong khoảng $(2;+\infty) \Leftrightarrow g(t) \le 0, \forall t > 0$

TH1: $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ 3m^2 - 2m - 1 \le 0 \end{cases}$ *TH2*: $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ 3m^2 - 2m - 1 > 0 \\ 4m^2 + 4m - 10 \le 0 \\ \dfrac{-2m-3}{m+1} < 0 \end{cases}$

Vậy: Với $-1 < m < 1$ *thì hàm số (1) nghịch biến trong khoảng* $(2;+\infty)$

Câu 7. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ (1), (m là tham số).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 3$.

2) Tìm m để hàm số (1) nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1.

• *Ta có* $y' = 3x^2 + 6x + m$ *có* $\Delta' = 9 - 3m$.

+ Nếu $m \ge 3$ *thì* $y' \ge 0, \forall x \in R$ $\Rightarrow$ *hàm số đồng biến trên R* $\Rightarrow m \ge 3$ *không thoả mãn.*

+ Nếu $m < 3$ *thì* $y' = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt* $x_1, x_2 \, (x_1 < x_2)$. *Hàm số nghịch biến trên đoạn* $[x_1; x_2]$ *với độ dài* $l = |x_1 - x_2|$. *Ta có:* $x_1 + x_2 = -2; \; x_1x_2 = \frac{m}{3}$.

YCBT $\Leftrightarrow l = 1 \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1 \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}$.

Câu 8. Cho hàm số $y = -2x^3 + 3mx^2 - 1$ (1).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$.

2) Tìm các giá trị của m để hàm số (1) đồng biến trong khoảng $(x_1; x_2)$ với $x_2 - x_1 = 1$.

• $y' = -6x^2 + 6mx$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = m$.

+ Nếu $m = 0 \Rightarrow y' \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ *hàm số nghịch biến trên* $\mathbb{R} \Rightarrow m = 0$ *không thoả YCBT.*

+ Nếu $m \neq 0$, $y' \geq 0, \forall x \in (0; m)$ *khi* $m > 0$ *hoặc* $y' \geq 0, \forall x \in (m; 0)$ *khi* $m < 0$.

Vậy hàm số đồng biến trong khoảng $(x_1; x_2)$ *với* $x_2 - x_1 = 1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x_1; x_2) = (0; m)\\ (x_1; x_2) = (m; 0)\end{array}\right.$ *và* $x_2 - x_1 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m - 0 = 1\\ 0 - m = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Câu 9. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 3m + 1$ (1), (m là tham số).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.

2) Tìm m để hàm số (1) đồng biến trên khoảng (1; 2).

• *Ta có* $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$

+ $m \leq 0$, $y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$ $\Rightarrow$ $m \leq 0$ *thoả mãn.*

+ $m > 0$, $y' = 0$ *có 3 nghiệm phân biệt:* $-\sqrt{m}$, 0, $\sqrt{m}$.

Hàm số (1) đồng biến trên (1; 2) $\Leftrightarrow \sqrt{m} \leq 1 \Leftrightarrow 0 < m \leq 1$. *Vậy* $m \in (-\infty; 1]$.

Câu hỏi tương tự:

a) Với $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$ *; y đồng biến trên khoảng* $(1; 3)$. *ĐS:* $m \leq 2$.

Câu 10. Cho hàm số $y = \dfrac{mx + 4}{x + m}$ (1)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = -1$.

2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số (1) nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

• *Tập xác định: D = R \ {–m}.* $y' = \dfrac{m^2 - 4}{(x + m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow y' < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$ *(1)*

Để hàm số (1) nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ *thì ta phải có* $-m \geq 1 \Leftrightarrow m \leq -1$ *(2)*

Kết hợp (1) và (2) ta được: $-2 < m \leq -1$.

Câu 11. Cho hàm số $y = \dfrac{2x^2 - 3x + m}{x - 1}$ (2).

Tìm m để hàm số (2) đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

• *Tập xác định:* $D = R \setminus \{1\}$. $y' = \dfrac{2x^2 - 4x + 3 - m}{(x-1)^2} = \dfrac{f(x)}{(x-1)^2}$.

Ta có: $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2x^2 - 4x + 3$. *Đặt* $g(x) = 2x^2 - 4x + 3 \Rightarrow g'(x) = 4x - 4$

Hàm số (2) đồng biến trên $(-\infty; -1) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (-\infty; -1) \Leftrightarrow m \leq \min\limits_{(-\infty; -1]} g(x)$

Dựa vào BBT của hàm số $g(x), \forall x \in (-\infty; -1]$ *ta suy ra* $m \leq 9$.

Vậy $m \leq 9$ *thì hàm số (2) đồng biến trên* $(-\infty; -1)$

Câu 12. Cho hàm số $y = \dfrac{2x^2 - 3x + m}{x - 1}$ (2).

Tìm m để hàm số (2) đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

• *Tập xác định:* $D = R \setminus \{1\}$. $y' = \dfrac{2x^2 - 4x + 3 - m}{(x-1)^2} = \dfrac{f(x)}{(x-1)^2}$.

Ta có: $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2x^2 - 4x + 3$. *Đặt* $g(x) = 2x^2 - 4x + 3 \Rightarrow g'(x) = 4x - 4$

Hàm số (2) đồng biến trên $(2; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow m \leq \min\limits_{[2; +\infty)} g(x)$

Dựa vào BBT của hàm số $g(x), \forall x \in (-\infty;-1]$ *ta suy ra* $m \le 3$.

Vậy $m \le 3$ *thì hàm số (2) đồng biến trên* $(2;+\infty)$.

Câu 13. Cho hàm số $y = \dfrac{2x^2 - 3x + m}{x-1}$ (2).

Tìm *m* để hàm số (2) đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

• *Tập xác định:* $D = R \setminus \{1\}$. $y' = \dfrac{2x^2 - 4x + 3 - m}{(x-1)^2} = \dfrac{f(x)}{(x-1)^2}$.

Ta có: $f(x) \ge 0 \Leftrightarrow m \le 2x^2 - 4x + 3$. *Đặt* $g(x) = 2x^2 - 4x + 3 \quad \Rightarrow g'(x) = 4x - 4$

Hàm số (2) đồng biến trên $(1;2) \;\Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in (1;2) \Leftrightarrow m \le \min\limits_{[1;2]} g(x)$

Dựa vào BBT của hàm số $g(x), \forall x \in (-\infty;-1]$ *ta suy ra* $m \le 1$.

Vậy $m \le 1$ *thì hàm số (2) đồng biến trên* $(1;2)$.

Câu 14. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2mx + 3m^2}{2m - x}$ (2).

Tìm *m* để hàm số (2) nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

• *Tập xác định:* $D = R \setminus \{2m\}$. $y' = \dfrac{-x^2 + 4mx - m^2}{(x-2m)^2} = \dfrac{f(x)}{(x-2m)^2}$. *Đặt* $t = x - 1$.

Khi đó bpt: $f(x) \le 0$ *trở thành:* $g(t) = -t^2 - 2(1-2m)t - m^2 + 4m - 1 \le 0$

Hàm số (2) nghịch biến trên $(-\infty;1) \Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in (-\infty;1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2m > 1 \\ g(t) \le 0, \forall t < 0 \quad (i) \end{cases}$

$$(i) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta' = 0 \\ \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ \begin{cases} m \ne 0 \\ 4m - 2 > 0 \\ m^2 - 4m + 1 \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m \ge 2 + \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy: Với $m \ge 2 + \sqrt{3}$ *thì hàm số (2) nghịch biến trên* $(-\infty;1)$.

Câu 15. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2mx + 3m^2}{2m - x}$ (2).

Tìm *m* để hàm số (2) nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

• *Tập xác định:* $D = R \setminus \{2m\}$. $y' = \dfrac{-x^2 + 4mx - m^2}{(x-2m)^2} = \dfrac{f(x)}{(x-2m)^2}$. *Đặt* $t = x - 1$.

Khi đó bpt: $f(x) \le 0$ *trở thành:* $g(t) = -t^2 - 2(1-2m)t - m^2 + 4m - 1 \le 0$

Hàm số (2) nghịch biến trên $(1;+\infty) \;\Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in (1;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} 2m < 1 \\ g(t) \le 0, \forall t > 0 \quad (ii) \end{cases}$

$$(ii) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta' = 0 \\ \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ \begin{cases} m \ne 0 \\ 4m - 2 < 0 \\ m^2 - 4m + 1 \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m \le 2 - \sqrt{3}$$

Vậy: Với $m \le 2 - \sqrt{3}$ *thì hàm số (2) nghịch biến trên* $(1;+\infty)$

KSHS 02: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Dạng 1: Cực trị của hàm số bậc 3: $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

A. Kiến thức cơ bản

• Hàm số có cực đại, cực tiểu ⇔ phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

• Hoành độ x_1, x_2 của các điểm cực trị là các nghiệm của phương trình $y' = 0$.

• Để viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu, ta có thể sử dụng phương pháp tách đạo hàm.

– Phân tích $y = f'(x).q(x) + h(x)$.

– Suy ra $y_1 = h(x_1), y_2 = h(x_2)$.

Do đó phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu là: $y = h(x)$.

• Gọi α là góc giữa hai đường thẳng $d_1 : y = k_1x + b_1,\ d_2 : y = k_2x + b_2$ thì $\tan\alpha = \left|\dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right|$

B. Một số dạng câu hỏi thường gặp

Gọi k là hệ số góc của đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu.

1. Tìm điều kiện để đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu song song (vuông góc) với đường thẳng $d : y = px + q$.

– Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu.

– Viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu.

– Giải điều kiện: $k = p$ (hoặc $k = -\dfrac{1}{p}$).

2. Tìm điều kiện để đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu tạo với đường thẳng $d : y = px + q$ một góc α.

– Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu.

– Viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu.

– Giải điều kiện: $\left|\dfrac{k - p}{1 + kp}\right| = \tan\alpha$. (Đặc biệt nếu $d \equiv Ox$, thì giải điều kiện: $|k| = \tan\alpha$)

3. Tìm điều kiện để đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu cắt hai trục O*x*, O*y* tại hai điểm A, B sao cho ΔIAB có diện tích S cho trước (với I là điểm cho trước).

– Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu.

– Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua các điểm cực đại, cực tiểu.

– Tìm giao điểm A, B của Δ với các trục O*x*, O*y*.

– Giải điều kiện $S_{\Delta IAB} = S$.

4. Tìm điều kiện để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho ΔIAB có diện tích S cho trước (với I là điểm cho trước).

– Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu.

– Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua các điểm cực đại, cực tiểu.

– Giải điều kiện $S_{\Delta IAB} = S$.

5. Tìm điều kiện để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B đối xứng qua đường thẳng *d* cho trước.

– Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu.

– Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua các điểm cực đại, cực tiểu.

– Gọi I là trung điểm của AB.

– Giải điều kiện: $\begin{cases} \Delta \perp d \\ I \in d \end{cases}$.

5. Tìm điều kiện để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B cách đều đường thẳng *d* cho trước.

– Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu.

– Giải điều kiện: $d(A,d) = d(B,d)$.

6. Tìm điều kiện để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B và khoảng cách giữa hai điểm A, B là lớn nhất (nhỏ nhất).

– Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu.

– Tìm toạ độ các điểm cực trị A, B (có thể dùng phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị).

– Tính AB. Dùng phương pháp hàm số để tìm GTLN (GTNN) của AB.

7. Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu và hoành độ các điểm cực trị thoả hệ thức cho trước.

– Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu.

– Phân tích hệ thức để áp dụng định lí Vi-et.

8. Tìm điều kiện để hàm số có cực trị trên khoảng $K_1 = (-\infty;\alpha)$ hoặc $K_2 = (\alpha;+\infty)$.

$y' = f(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Đặt $t = x - \alpha$. Khi đó: $y' = g(t) = 3at^2 + 2(3a\alpha + b)t + 3a\alpha^2 + 2b\alpha + c$

Hàm số có cực trị thuộc $K_1 = (-\infty;\alpha)$	Hàm số có cực trị thuộc $K_2 = (\alpha;+\infty)$
Hàm số có cực trị trên khoảng $(-\infty;\alpha)$ $\Leftrightarrow f(x) = 0$ có nghiệm trên $(-\infty;\alpha)$. $\Leftrightarrow g(t) = 0$ có nghiệm $t < 0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P < 0 \\ \begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ S < 0 \\ P \ge 0 \end{cases} \end{array}\right.$	Hàm số có cực trị trên khoảng $(\alpha;+\infty)$ $\Leftrightarrow f(x) = 0$ có nghiệm trên $(\alpha;+\infty)$. $\Leftrightarrow g(t) = 0$ có nghiệm $t > 0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P < 0 \\ \begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ S > 0 \\ P \ge 0 \end{cases} \end{array}\right.$

9. **Tìm điều kiện để hàm số có hai cực trị x_1, x_2 thoả:**

a) $x_1 < \alpha < x_2$ **b)** $x_1 < x_2 < \alpha$ **c)** $\alpha < x_1 < x_2$

$y' = f(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Đặt $t = x - \alpha$. Khi đó: $y' = g(t) = 3at^2 + 2(3a\alpha + b)t + 3a\alpha^2 + 2b\alpha + c$

a) Hàm số có hai cực trị x_1, x_2 thoả $x_1 < \alpha < x_2$ $\Leftrightarrow g(t) = 0$ có hai nghiệm t_1, t_2 thoả $t_1 < 0 < t_2$ $\Leftrightarrow P < 0$
b) Hàm số có hai cực trị x_1, x_2 thoả $x_1 < x_2 < \alpha$ $\Leftrightarrow g(t) = 0$ có hai nghiệm t_1, t_2 thoả $t_1 < t_2 < 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$
c) Hàm số có hai cực trị *x₁, x₂* thoả $\alpha < x_1 < x_2$ $\Leftrightarrow g(t) = 0$ có hai nghiệm t_1, t_2 thoả $0 < t_1 < t_2$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$

Câu 1. Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1-m^2)x + m^3 - m^2$ (1)
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.
2) Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1).

• $y' = -3x^2 + 6mx + 3(1-m^2)$.

PT $y' = 0$ *có* $\Delta = 1 > 0, \forall m$ $\Rightarrow$ *Đồ thị hàm số (1) luôn có 2 điểm cực trị* $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$.

Chia y cho y′ ta được: $y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{m}{3}\right)y' + 2x - m^2 + m$

Khi đó: $y_1 = 2x_1 - m^2 + m$; $y_2 = 2x_2 - m^2 + m$

PT đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) là $y = 2x - m^2 + m$.

Câu 2. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m - 2$ (*m* là tham số) có đồ thị là (C_m).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi *m* = 3.
2) Xác định *m* để (C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía đối với trục hoành.

• *PT hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành:*

$$x^3 + 3x^2 + mx + m - 2 = 0 \quad (1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ g(x) = x^2 + 2x + m - 2 = 0 \quad (2) \end{array}\right.$$

(C_m) có 2 điểm cực trị nằm về 2 phía đối với trục Ox $\Leftrightarrow$ *PT (1) có 3 nghiệm phân biệt*

$\Leftrightarrow$ *(2) có 2 nghiệm phân biệt khác –1* $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 3 - m > 0 \\ g(-1) = m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 3$

Câu 3. Cho hàm số $y = -x^3 + (2m+1)x^2 - (m^2 - 3m + 2)x - 4$ (*m* là tham số) có đồ thị là (C_m).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi *m* = 1.
2) Xác định *m* để (C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía của trục tung.

• $y' = -3x^2 + 2(2m+1)x - (m^2 - 3m + 2)$.

(C_m) có các điểm CĐ và CT nằm về hai phía của trục tung $\Leftrightarrow$ *PT* $y' = 0$ *có 2 nghiệm trái dấu* $\Leftrightarrow 3(m^2 - 3m + 2) < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2$.

Câu 4. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x - 3$ (*m* là tham số) có đồ thị là (C_m).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi *m* = 2.
2) Xác định *m* để (C_m) có các điểm cực đại, cực tiểu nằm về cùng một phía đối với trục tung.

• *TXĐ: D = R ;* $y' = x^2 - 2mx + 2m - 1$.

Đồ thị (C_m) có 2 điểm CĐ, CT nằm cùng phía đối với trục tung $\Leftrightarrow$ $y' = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu* $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 2m + 1 > 0 \\ 2m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}$.

Câu 5. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ (*m* là tham số) có đồ thị là (C_m).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi *m* = 1.
2) Xác định *m* để (C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu cách đều đường thẳng $y = x - 1$.

• *Ta có:* $y' = 3x^2 - 6x - m$.

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow y' = 3x^2 - 6x - m = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt* $x_1; x_2$

$\Leftrightarrow \Delta' = 9 + 3m > 0 \Leftrightarrow m > -3$ *(*)*

Gọi hai điểm cực trị là $A\left(x_1;y_1\right);B\left(x_2;y_2\right)$

Thực hiện phép chia y cho y' ta được: $y=\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)y'+\left(\frac{2m}{3}-2\right)x+\left(2+\frac{m}{3}\right)$

$\Rightarrow\ \ y_1=y(x_1)=\left(\frac{2m}{3}-2\right)x_1+2+\frac{m}{3};\ y_2=y(x_2)=\left(\frac{2m}{3}-2\right)x_2+2+\frac{m}{3}$

$\Rightarrow$ *Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là* Δ: $y=\left(\frac{2m}{3}-2\right)x+2+\frac{m}{3}$

Các điểm cực trị cách đều đường thẳng $y=x-1\Leftrightarrow$ *xảy ra 1 trong 2 trường hợp:*

TH1: Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị song song hoặc trùng với đường thẳng $y=x-1$

$\Leftrightarrow\frac{2m}{3}-2=1\Leftrightarrow m=\frac{9}{2}$ *(không thỏa (*))*

TH2: Trung điểm I của AB nằm trên đường thẳng $y=x-1$

$\Leftrightarrow y_I=x_I-1\Leftrightarrow\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{x_1+x_2}{2}-1\Leftrightarrow\left(\frac{2m}{3}-2\right)\left(x_1+x_2\right)+2\left(2+\frac{m}{3}\right)=\left(x_1+x_2\right)-2$

$\Leftrightarrow\left(\frac{2m}{3}-2\right).2+2\left(2+\frac{m}{3}\right)=0\Leftrightarrow m=0$

Vậy các giá trị cần tìm của m là: $m=0$.

Câu 6. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^3$ (*m* là tham số) có đồ thị là (C_m).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi *m* = 1.
2) Xác định *m* để (C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng *y* = *x*.

• *Ta có:* $y'=3x^2-6mx$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2m\end{array}\right.$. *Để hàm số có cực đại và cực tiểu thì m ≠ 0.*

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là: $A(0;4m^3)$, $B(2m;0)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(2m;-4m^3)$

Trung điểm của đoạn AB là $I(m;2m^3)$

A, B đối xứng nhau qua đường thẳng d: y = x $\Leftrightarrow\begin{cases}AB\perp d\\I\in d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2m-4m^3=0\\2m^3=m\end{cases}\Leftrightarrow m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 7. Cho hàm số $y=-x^3+3mx^2-3m-1$.
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = 1.
2) Với giá trị nào của *m* thì đồ thị hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng d: $x+8y-74=0$.

• $y'=-3x^2+6mx$; $y'=0\Leftrightarrow x=0\vee x=2m$.

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow$ *PT* $y'=0$ *có 2 nghiệm phân biệt* $\Leftrightarrow m\neq0$.

Khi đó 2 điểm cực trị là: $A(0;-3m-1)$, $B(2m;4m^3-3m-1)\Rightarrow\overrightarrow{AB}(2m;4m^3)$

Trung điểm I của AB có toạ độ: $I(m;2m^3-3m-1)$

Đường thẳng d: $x+8y-74=0$ *có một VTCP* $\vec{u}=(8;-1)$.

A và B đối xứng với nhau qua d $\Leftrightarrow\begin{cases}I\in d\\AB\perp d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m+8(2m^3-3m-1)-74=0\\\overrightarrow{AB}.\vec{u}=0\end{cases}\Leftrightarrow m=2$

<u>Câu hỏi tương tự:</u>

a) $y=x^3-3x^2+m^2x+m,d:y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$. *ĐS:* $m=0$.

Câu 8. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+mx$ (1).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = 0.
2) Với giá trị nào của *m* thì đồ thị hàm số (1) có các điểm cực đại và điểm cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng d: $x-2y-5=0$.

• *Ta có* $y=x^3-3x^2+mx \Rightarrow y'=3x^2-6x+m$

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow$ $y'=0$ *có hai nghiệm phân biệt* $\Leftrightarrow \Delta'=9-3m>0 \Leftrightarrow m<3$

Ta có: $y=\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)y'+\left(\frac{2}{3}m-2\right)x+\frac{1}{3}m$

$\Rightarrow$ *đường thẳng Δ đi qua các điểm cực trị có phương trình* $y=\left(\frac{2}{3}m-2\right)x+\frac{1}{3}m$

nên Δ có hệ số góc $k_1=\frac{2}{3}m-2$.

d: $x-2y-5=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2} \Rightarrow$ *d có hệ số góc* $k_2=\frac{1}{2}$

Để hai điểm cực trị đối xứng qua d thì ta phải có $d\perp\Delta$

$$\Rightarrow k_1k_2=-1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}m-2\right)=-1 \Leftrightarrow m=0$$

Với m = 0 thì đồ thị có hai điểm cực trị là (0; 0) và (2; –4), nên trung điểm của chúng là I(1; –2). Ta thấy I ∈ d, do đó hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua d.
Vậy: m = 0

Câu 9. Cho hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+9x+m-2$ (1) có đồ thị là (C_m).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = 1.
2) Với giá trị nào của *m* thì đồ thị hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng d: $y=\frac{1}{2}x$.

• $y'=3x^2-6(m+1)x+9$

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow \Delta'=9(m+1)^2-3.9>0 \Leftrightarrow m\in(-\infty;-1-\sqrt{3})\cup(-1+\sqrt{3};+\infty)$

Ta có $y=\left(\frac{1}{3}x-\frac{m+1}{3}\right)y'-2(m^2+2m-2)x+4m+1$

Giả sử các điểm cực đại và cực tiểu là $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, *I là trung điểm của AB.*

$\Rightarrow y_1=-2(m^2+2m-2)x_1+4m+1$; $y_2=-2(m^2+2m-2)x_2+4m+1$

và: $\begin{cases}x_1+x_2=2(m+1)\\ x_1.x_2=3\end{cases}$

Vậy đường thẳng đi qua hai điểm cực đại và cực tiểu là $y=-2(m^2+2m-2)x+4m+1$

A, B đối xứng qua (d): $y=\frac{1}{2}x \Leftrightarrow \begin{cases}AB\perp d\\ I\in d\end{cases} \Leftrightarrow m=1$.

Câu 10. Cho hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+9x-m$, với m là tham số thực.
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho ứng với $m=1$.
2) Xác định m để hàm số đã cho đạt cực trị tại x_1,x_2 sao cho $|x_1-x_2|\le 2$.

• *Ta có* $y'=3x^2-6(m+1)x+9$.

+ Hàm số đạt cực đại, cực tiểu tại x_1, x_2 $\Leftrightarrow$ *PT* $y'=0$ *có hai nghiệm phân biệt* x_1, x_2

$\Leftrightarrow$ *PT* $x^2-2(m+1)x+3=0$ *có hai nghiệm phân biệt là* x_1, x_2.

$$\Leftrightarrow \Delta' = (m+1)^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > -1+\sqrt{3} \\ m < -1-\sqrt{3} \end{array}\right. \quad (1)$$

+ Theo định lý Viet ta có $x_1 + x_2 = 2(m+1); x_1x_2 = 3$. *Khi đó:*

$|x_1 - x_2| \le 2 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 \le 4 \Leftrightarrow 4(m+1)^2 - 12 \le 4 \Leftrightarrow (m+1)^2 \le 4 \Leftrightarrow -3 \le m \le 1$ *(2)*

+ Từ (1) và (2) suy ra giá trị của m cần tìm là $-3 \le m < -1-\sqrt{3}$ *và* $-1+\sqrt{3} < m \le 1$.

Câu 11. Cho hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$, với m là tham số thực.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho ứng với $m = 1$.

2) Xác định m để hàm số đã cho đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| > \frac{1}{3}$.

• *Ta có:* $y' = 3x^2 + 2(1-2m)x + (2-m)$

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow y' = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt* x_1, x_2 *(giả sử* $x_1 < x_2$*)*

$$\Leftrightarrow \Delta' = (1-2m)^2 - 3(2-m) = 4m^2 - m - 5 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \frac{5}{4} \\ m < -1 \end{array}\right. \quad (*)$$

Hàm số đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2. *Khi đó ta có:* $x_1 + x_2 = -\frac{2(1-2m)}{3}; x_1x_2 = \frac{2-m}{3}$

$$|x_1 - x_2| > \frac{1}{3} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = (x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 > \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow 4(1-2m)^2 - 4(2-m) > 1 \Leftrightarrow 16m^2 - 12m - 5 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{3+\sqrt{29}}{8} \vee m < \frac{3-\sqrt{29}}{8}$$

Kết hợp (*), ta suy ra $m > \frac{3+\sqrt{29}}{8} \vee m < -1$

Câu 12. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + mx - 1$, với m là tham số thực.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho ứng với $m = 1$.

2) Xác định m để hàm số đã cho đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| \ge 8$.

• *Ta có:* $y' = x^2 - 2mx + m$.

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow y' = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt* x_1, x_2 *(giả sử* $x_1 < x_2$*)*

$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - m > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 1 \end{array}\right.$ *(*). Khi đó:* $x_1 + x_2 = 2m, x_1x_2 = m$.

$$|x_1 - x_2| \ge 8 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \ge 64 \Leftrightarrow m^2 - m - 16 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le \frac{1-\sqrt{65}}{2} \\ m \ge \frac{1+\sqrt{65}}{2} \end{array}\right. \quad \textit{(thoả (*))}$$

Câu 13. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$, với m là tham số thực.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho ứng với $m = 2$.

2) Xác định m để hàm số đã cho đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $x_1 + 2x_2 = 1$.

• *Ta có:* $y' = x^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$

Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ *có hai nghiệm phân biệt* x_1, x_2

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 7 > 0$ *(luôn đúng với* $\forall m$*)*

Khi đó ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1x_2 = 3(m-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 3-2m \\ x_2(1-2x_2) = 3(m-2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow 8m^2 + 16m - 9 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{-4 \pm \sqrt{34}}{4}$.

Câu 14. Cho hàm số $y = 4x^3 + mx^2 - 3x$.
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 0$.
2) Tìm m để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa $x_1 = -4x_2$.

• $y' = 12x^2 + 2mx - 3$. *Ta có:* $\Delta' = m^2 + 36 > 0, \forall m \Rightarrow$ *hàm số luôn có 2 cực trị* x_1, x_2.

Khi đó: $\begin{cases} x_1 = -4x_2;\ x_1 + x_2 = -\dfrac{m}{6};\ x_1x_2 = -\dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow m = \pm\dfrac{9}{2}$

<u>Câu hỏi tương tự</u>:

a) $y = x^3 + 3x^2 + mx + 1;\quad x_1 + 2x_2 = 3$ *ĐS:* $m = -105$.

Câu 15. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - ax^2 - 3ax + 4$ (1) (a là tham số).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $a = 1$.
2) Tìm a để hàm số (1) đạt cực trị tại x_1, x_2 phân biệt và thoả mãn điều kiện:

$$\frac{x_1^2 + 2ax_2 + 9a}{a^2} + \frac{a^2}{x_2^2 + 2ax_1 + 9a} = 2 \quad (2)$$

• $y' = x^2 - 2ax - 3a$. *Hàm số có CĐ, CT* $\Leftrightarrow y' = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt* x_1, x_2

$\Leftrightarrow \Delta = 4a^2 + 12a > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < -3 \\ a > 0 \end{array}\right.$ *(*). Khi đó* $x_1 + x_2 = 2a$, $x_1x_2 = -3a$.

Ta có: $x_1^2 + 2ax_2 + 9a = 2a(x_1 + x_2) + 12a = 4a^2 + 12a > 0$

Tương tự: $x_2^2 + 2ax_1 + 9a = 4a^2 + 12a > 0$

Do đó: (2) $\Leftrightarrow \dfrac{4a^2 + 12a}{a^2} + \dfrac{a^2}{4a^2 + 12a} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{4a^2 + 12a}{a^2} = 1 \Leftrightarrow 3a(a+4) = 0 \Leftrightarrow a = -4$

Câu 16. Cho hàm số $y = 2x^3 + 9mx^2 + 12m^2x + 1$ (m là tham số).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = -1$.
2) Tìm các giá trị của m để hàm số có cực đại tại $x_{CĐ}$, cực tiểu tại x_{CT} thỏa mãn: $x^2_{CĐ} = x_{CT}$.

• *Ta có:* $y' = 6x^2 + 18mx + 12m^2 = 6(x^2 + 3mx + 2m^2)$

Hàm số có CĐ và CT $\Leftrightarrow y' = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt* $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta = m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$

Khi đó: $x_1 = \dfrac{1}{2}(-3m - |m|)$, $x_2 = \dfrac{1}{2}(-3m + |m|)$.

Dựa vào bảng xét dấu y', suy ra $x_{CĐ} = x_1, x_{CT} = x_2$

Do đó: $x^2_{CĐ} = x_{CT} \Leftrightarrow \left(\dfrac{-3m - |m|}{2}\right)^2 = \dfrac{-3m + |m|}{2} \Leftrightarrow m = -2$.

Câu 17. Cho hàm số $y = (m+2)x^3 + 3x^2 + mx - 5$, m là tham số.
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 0$.

2) Tìm các giá trị của m để các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có hoành độ là các số dương.

• *Các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có hoành độ là các số dương*

$\Leftrightarrow$ *PT* $y' = 3(m+2)x^2 + 6x + m = 0$ *có 2 nghiệm dương phân biệt*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = (m+2) \neq 0 \\ \Delta' = 9 - 3m(m+2) > 0 \\ P = \dfrac{m}{3(m+2)} > 0 \\ S = \dfrac{-3}{m+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = -m^2 - 2m + 3 > 0 \\ m < 0 \\ m+2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 1 \\ m < 0 \\ m < -2 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < -2$$

Câu 18. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + (m^2-3)x$ (1), m là tham số.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 0$.

2) Tìm các giá trị của m để hàm số (1) có các điểm cực trị x_1, x_2 với $x_1 > 0, x_2 > 0$ và $x_1^2 + x_2^2 = \frac{5}{2}$.

• $y' = x^2 - mx + m^2 - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - mx + m^2 - 3 = 0$ *(2)*

$$YCBT \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3} < m < 2 \\ m = \pm\dfrac{\sqrt{14}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Câu 19. Cho hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$ (m là tham số) (1).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = 2$.

2) Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số (1) có điểm cực đại, điểm cực tiểu, đồng thời hoành độ của điểm cực tiểu nhỏ hơn 1.

• $y' = 3x^2 + 2(1-2m)x + 2 - m = g(x)$

YCBT $\Leftrightarrow$ *phương trình* $y' = 0$ *có hai nghiệm phân biệt* x_1, x_2 *thỏa mãn:* $x_1 < x_2 < 1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4m^2 - m - 5 > 0 \\ g(1) = -5m + 7 > 0 \\ \dfrac{S}{2} = \dfrac{2m-1}{3} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4} < m < \frac{7}{5}.$$

Câu 20. Cho hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 + (m-2)x^2 + (m-1)x + 2$ (Cm).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$.

2) Tìm m để hàm số có cực đại tại x_1, cực tiểu tại x_2 thỏa mãn $x_1 < x_2 < 1$.

• *Ta có:* $y' = mx^2 + 2(m-2)x + m - 1$; $y' = 0 \Leftrightarrow mx^2 + 2(m-2)x + m - 1 = 0$ (1)

Hàm số có CĐ ,CT thỏa mãn $x_1 < x_2 < 1$ *khi m > 0 và (1) có 2 nghiệm phân biệt bé hơn 1*

Đặt $t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1$, *thay vào (1) ta được:*

$$m(t+1)^2 + 2(m-2)(t+1) + m - 1 = 0 \Leftrightarrow mt^2 + 4(m-1)t + 4m - 5 = 0$$

(1) có 2 nghiệm phân biệt bé hơn 1 $\Leftrightarrow$ *(2) có 2 nghiệm âm phân biệt*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4} < m < \frac{4}{3}.$$

Câu 21. Cho hàm số $y = x^3 + (1-2m)x^2 + (2-m)x + m + 2$ (C*m*).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = 1.

2) Tìm *m* để hàm số có ít nhất 1 điểm cực trị có hoành độ thuộc khoảng $(-2;0)$.

• *Ta có:* $y' = 3x^2 + 2(1-2m)x + 2 - m$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2(1-2m)x + 2 - m = 0$ *(*)*

Hàm số có ít nhất 1 cực trị thuộc $(-2;0)$ $\Leftrightarrow$ *(*) có 2 nghiệm phân biệt* x_1, x_2 *và có ít nhất 1 nghiệm thuộc* $(-2;0)$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} -2 < x_1 < x_2 < 0 & (1) \\ -2 < x_1 < 0 \le x_2 & (2) \\ x_1 \le -2 < x_2 < 0 & (3) \end{array}\right.$

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4m^2 - m - 5 > 0 \\ -2 < \dfrac{x_1 + x_2}{2} < 0 \\ (x_1+2)(x_2+2) > 0 \\ x_1x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - m - 5 > 0 \\ -2 < \dfrac{2m-1}{3} < 0 \\ 4 + \dfrac{4(2m-1)}{3} + \dfrac{2-m}{3} > 0 \\ \dfrac{2-m}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{10}{7} < m < -1$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4m^2 - m - 5 > 0 \\ f(0) = 2 - m \le 0 \\ (x_1+2)+(x_2+2) > 0 \\ (x_1+2)(x_2+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - m - 5 > 0 \\ m \ge 2 \\ \dfrac{2m-1}{3} > -2 \\ \dfrac{2-m}{3} + \dfrac{4(2m-1)}{3} + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 2$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4m^2 - m - 5 > 0 \\ f(-2) = 10 + 6m \le 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \\ x_1x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - m - 5 > 0 \\ 3m + 5 \ge 0 \\ \dfrac{2m-1}{3} < 0 \\ \dfrac{2-m}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{3} \le m < -1$$

Tóm lại các giá trị m cần tìm là: $m \in \left[-\frac{5}{3}; -1\right) \cup [2; +\infty)$

Câu 22. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (1)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).

2) Tìm điểm M thuộc đường thẳng d: $y = 3x - 2$ sao tổng khoảng cách từ M tới hai điểm cực trị nhỏ nhất.

• *Các điểm cực trị là: A(0; 2), B(2; –2).*

Xét biểu thức $g(x,y) = 3x - y - 2$ *ta có:*

$$g(x_A, y_A) = 3x_A - y_A - 2 = -4 < 0; \; g(x_B, y_B) = 3x_B - y_B - 2 = 6 > 0$$

$\Rightarrow$ *2 điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía của đường thẳng d:* $y = 3x - 2$.

Do đó MA + MB nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ *3 điểm A, M, B thẳng hàng* $\Leftrightarrow$ *M là giao điểm của d và AB.*

Phương trình đường thẳng AB: $y = -2x + 2$

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = -2x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{5}; \; y = \dfrac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{4}{5}; \dfrac{2}{5}\right)$

Câu 23. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2-1)x - m^3 + m$ (1)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.

2) Tìm m để hàm số (1) có cực trị đồng thời khoảng cách từ điểm cực đại của đồ thị hàm số đến gốc tọa độ O bằng $\sqrt{2}$ lần khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đến gốc tọa độ O.

• *Ta có* $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2-1)$. *Hàm số (1) có cực trị* $\Leftrightarrow$ *PT* $y' = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt*

$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ *có 2 nhiệm phân biệt* $\Leftrightarrow \Delta = 1 > 0, \forall m$

Khi đó: điểm cực đại $A(m-1; 2-2m)$ *và điểm cực tiểu* $B(m+1; -2-2m)$

Ta có $OA = \sqrt{2}OB \Leftrightarrow m^2 + 6m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -3+2\sqrt{2} \\ m = -3-2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Câu 24. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ có đồ thị là (C_m).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$.

2) Tìm m để (C_m) có các điểm cực đại, cực tiểu và đường thẳng đi qua các điểm cực trị song song với đường thẳng d: $y = -4x + 3$.

• *Ta có:* $y' = 3x^2 - 6x - m$. *Hàm số có CĐ, CT* $\Leftrightarrow y' = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt* x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \Delta' = 9 + 3m > 0 \Leftrightarrow m > -3 \text{ (*)}$$

Gọi hai điểm cực trị là $A\left(x_1; y_1\right); B\left(x_2; y_2\right)$

Thực hiện phép chia y cho y′ ta được: $y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)y' - \left(\frac{2m}{3} + 2\right)x + \left(2 - \frac{m}{3}\right)$

$\Rightarrow \quad y_1 = y\left(x_1\right) = -\left(\frac{2m}{3}+2\right)x_1 + \left(2 - \frac{m}{3}\right); \; y_2 = y\left(x_2\right) = -\left(\frac{2m}{3}+2\right)x_2 + \left(2 - \frac{m}{3}\right)$

$\Rightarrow$ *Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là* Δ: $y = -\left(\frac{2m}{3}+2\right)x + \left(2 - \frac{m}{3}\right)$

$\Delta // d$: $y = -4x + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} -\left(\frac{2m}{3}+2\right) = -4 \\ \left(2 - \frac{m}{3}\right) \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$ *(thỏa mãn (*))*

<u>Câu hỏi tương tự</u>:

a) $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (5m-4)x + 2$, $d: 8x + 3y + 9 = 0$ *ĐS:* $m = 0; m = 5$.

Câu 25. Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 + 7x + 3$ có đồ thị là (C_m).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 5$.

2) Tìm m để (C_m) có các điểm cực đại, cực tiểu và đường thẳng đi qua các điểm cực trị vuông góc với đường thẳng d: $y = 3x - 7$.

• *Ta có:* $y' = 3x^2 + 2mx + 7$. *Hàm số có CĐ, CT* $\Leftrightarrow$ $y' = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt* x_1, x_2.

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 21 > 0 \Leftrightarrow |m| > \sqrt{21} \text{ (*)}$$

Gọi hai điểm cực trị là $A\left(x_1; y_1\right); B\left(x_2; y_2\right)$

Thực hiện phép chia y cho y′ ta được: $y = \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}\right)y' + \frac{2}{9}(21 - m^2)x + \left(3 - \frac{7m}{9}\right)$

$\Rightarrow \quad y_1 = y(x_1) = \frac{2}{9}(21 - m^2)x_1 + \left(3 - \frac{7m}{9}\right); \; y_2 = y(x_2) = \frac{2}{9}(21 - m^2)x_2 + \left(3 - \frac{7m}{9}\right)$

$\Rightarrow$ *Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là Δ:* $y = \frac{2}{9}(21-m^2)x + 3 - \frac{7m}{9}$

Δ ⊥ d: $y = -4x + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} |m| > \sqrt{21} \\ \frac{2}{9}(21-m^2).3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm\frac{3\sqrt{10}}{2}$.

Câu 26. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2$ có đồ thị là (C_m).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$.
2) Tìm m để (C_m) có các điểm cực đại, cực tiểu và đường thẳng đi qua các điểm cực trị tạo với đường thẳng d: $x + 4y - 5 = 0$ một góc $\alpha = 45^0$.

• *Ta có:* $y' = 3x^2 - 6x - m$. *Hàm số có CĐ, CT* $\Leftrightarrow y' = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt* $x_1; x_2$

$\Leftrightarrow \Delta' = 9 + 3m > 0 \Leftrightarrow m > -3$ *(*)*

Gọi hai điểm cực trị là $A(x_1;y_1); B(x_2;y_2)$

Thực hiện phép chia y cho y' ta được: $y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)y' - \left(\frac{2m}{3} + 2\right)x + \left(2 - \frac{m}{3}\right)$

$\Rightarrow\ y_1 = y(x_1) = -\left(\frac{2m}{3} + 2\right)x_1 + \left(2 - \frac{m}{3}\right);\ y_2 = y(x_2) = -\left(\frac{2m}{3} + 2\right)x_2 + \left(2 - \frac{m}{3}\right)$

$\Rightarrow$ *Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là Δ:* $y = -\left(\frac{2m}{3} + 2\right)x + \left(2 - \frac{m}{3}\right)$

Đặt $k = -\left(\frac{2m}{3} + 2\right)$. *Đường thẳng d:* $x + 4y - 5 = 0$ *có hệ số góc bằng* $-\frac{1}{4}$.

Ta có: $\tan 45^\circ = \left|\frac{k + \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}k}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k + \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}k \\ k + \frac{1}{4} = -1 + \frac{1}{4}k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = \frac{3}{5} \\ k = -\frac{5}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\frac{39}{10} \\ m = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện (*), suy ra giá trị m cần tìm là: $m = -\frac{1}{2}$.

Câu hỏi tương tự:

a) $y = x^3 - 3(m-1)x^2 + (2m^2 - 3m + 2)x - m(m-1)$, $d: y = \frac{-1}{4}x + 5$, $\alpha = 45^0$. *ĐS:* $m = \frac{3 \pm \sqrt{15}}{2}$

Câu 27. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (C).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số .
2) Tìm m để đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C) tiếp xúc với đường tròn (S) có phương trình $(x-m)^2 + (y-m-1)^2 = 5$.

• *Phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm cực trị* $2x + y - 2 = 0$.

(S) có tâm $I(m, m+1)$ *và bán kính* $R = \sqrt{5}$.

Δ tiếp xúc với (S) $\Leftrightarrow \frac{|2m + m + 1 - 2|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |3m - 1| = 5 \Leftrightarrow m = 2; m = \frac{-4}{3}$.

Câu 28. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ (C_m).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$.
2) Tìm m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của (C_m) cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính bằng 1 tại hai điểm phân biệt *A, B* sao cho diện tích Δ*IAB* đạt giá trị lớn nhất **.**

• *Ta có* $y' = 3x^2 - 3m$. *Hàm số có CĐ, CT* $\Leftrightarrow$ *PT* $y' = 0$ *có hai nghiệm phân biệt* $\Leftrightarrow m > 0$

Vì $y = \frac{1}{3}x.y' - 2mx + 2$ *nên đường thẳng* Δ *đi qua các điểm CĐ, CT của đồ thị hàm số có phương trình là:* $y = -2mx + 2$

Ta có $d(I,\Delta) = \frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} < R = 1$ *(vì m > 0)* $\Rightarrow \Delta$ *luôn cắt đường tròn tâm I(1; 1), bán kính R = 1 tại 2 điểm A, B phân biệt.*

Với $m \neq \frac{1}{2}$ *:* Δ *không đi qua I, ta có:* $S_{\Delta ABI} = \frac{1}{2}IA.IB.\sin AIB \le \frac{1}{2}R^2 = \frac{1}{2}$

Nên $S_{\Delta IAB}$ *đạt GTLN bằng* $\frac{1}{2}$ *khi* $\sin\widehat{AIB} = 1$ *hay* ΔAIB *vuông cân tại I* $\Leftrightarrow IH = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$ *(H là trung điểm của AB)*

Câu 29. Cho hàm số $y = x^3 + 6mx^2 + 9x + 2m$ (1), với *m* là tham số thực.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = 1.

2) Tìm *m* để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị sao cho khoảng cách từ gốc toạ độ O đến đường thẳng đi qua hai điểm cực trị bằng $\frac{4}{\sqrt{5}}$.

• *Ta có:* $y' = 3x^2 + 12mx + 9$. *Hàm số có 2 điểm cực trị* $\Leftrightarrow$ *PT* $y' = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt*

$\Leftrightarrow \Delta' = 4m^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{\sqrt{3}}{2}$ *hoặc* $m < \frac{-\sqrt{3}}{2}$ *(*)*

Khi đó ta có: $y = \left(\frac{x}{3} + \frac{2m}{3}\right).y' + (6 - 8m^2)x - 4m$

$\Rightarrow$ *đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) có PT là:* $\Delta : y = (6 - 8m^2)x - 4m$

$$d(O,\Delta) = \frac{|-4m|}{\sqrt{(6-8m^2)^2+1}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow 64m^4 - 101m^2 + 37 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \pm 1 \\ m = \pm\frac{\sqrt{37}}{8} \quad (\text{loại}) \end{array}\right. \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Câu 30. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (m-6)x + m - 2$ (1), với *m* là tham số thực.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = 2.

2) Tìm *m* để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị sao cho khoảng cách từ điểm $A(1;-4)$ đến đường thẳng đi qua hai điểm cực trị bằng $\frac{12}{\sqrt{265}}$.

• *Ta có:* $y' = 3x^2 - 6x + m - 6$. *Hàm số có 2 điểm cực trị* $\Leftrightarrow$ *PT* $y' = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt*

$\Leftrightarrow \Delta' = 3^2 - 3(m-6) > 0 \Leftrightarrow m < 9$ *(*)*

Ta có: $y = \frac{1}{3}(x-1).y' + \left(\frac{2}{3}m - 6\right)x + \frac{4}{3}m - 4$

$\Rightarrow$ *PT đường thẳng qua 2 điểm cực trị* Δ*:* $y = \left(\frac{2}{3}m - 6\right)x + \frac{4}{3}m - 4$

$$\Rightarrow d(A,\Delta) = \frac{|6m-18|}{\sqrt{4m^2 - 72m + 333}} = \frac{12}{\sqrt{265}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \frac{1053}{249} \end{array}\right. \quad (\text{thoả (*)})$$

Câu 31. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$ (1), với *m* là tham số thực.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = 0.

2) Tìm *m* để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị sao cho khoảng cách từ điểm $I\left(\frac{1}{2};\frac{11}{4}\right)$ đến đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là lớn nhất.

• *Ta có:* $y' = 3x^2 - 6x + m$. *Hàm số có 2 điểm cực trị* $\Leftrightarrow$ *PT* $y' = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt* $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Ta có: $y = \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{3}\right)y' + \left(\frac{2m}{3} - 2\right)x + \frac{m}{3} + 1$

$\Rightarrow$ *PT đường thẳng qua hai điểm cực trị là:* $\Delta : y = \left(\frac{2m}{3} - 2\right)x + \frac{m}{3} + 1$.

Dễ dàng tìm được điểm cố định của Δ là $A\left(-\frac{1}{2};2\right)$. $\overrightarrow{AI} = \left(1;\frac{3}{4}\right)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên Δ.

Ta có $d(I,\Delta) = IH \le IA$. *Dấu "=" xảy ra* $\Leftrightarrow IA \perp \Delta \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{2m}{3} - 2\right).\frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Vậy $\max(d(I,\Delta)) = \frac{5}{4}$ *khi* $m = 1$.

Câu 32. Cho hàm số $y = x^3 + 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x + m^3 + 3m^2$ (C_m).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = 0.

2) Chứng minh rằng với mọi *m*, đồ thị (C*m*) luôn có 2 điểm cực trị và khoảng cách giữa 2 điểm cực trị là không đổi.

• *Ta có:* $y' = 3x^2 + 6(m+1)x + 6m(m+2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 - m \\ x = -m \end{array}\right.$.

Đồ thị (Cm) có điểm cực đại $A(-2-m;4)$ *và điểm cực tiểu* $B(-m;0)$ $\Rightarrow AB = 2\sqrt{5}$.

Câu 33. Cho hàm số $y = 2x^2 - 3(m+1)x^2 + 6mx + m^3$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = 1.

2) Tìm *m* để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho $AB = \sqrt{2}$.

• *Ta có:* $y' = 6(x-1)(x-m)$. *Hàm số có CĐ, CT* $\Leftrightarrow y' = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt* $\Leftrightarrow m \neq 1$.

Khi đó các điểm cực trị là $A(1;m^3 + 3m - 1), B(m;3m^2)$.

$AB = \sqrt{2} \Leftrightarrow (m-1)^2 + (3m^2 - m^3 - 3m + 1) = 2 \Leftrightarrow m = 0; m = 2$ *(thoả điều kiện).*

Câu 34. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + 4m - 1$ (1)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = -1$.

2) Tìm *m* để đồ thị của hàm số (1) có hai điểm cực trị *A*, *B* sao cho ΔOAB vuông tại O.

• *Ta có:* $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m + 1 \Rightarrow y = m - 3 \\ x = m - 1 \Rightarrow y = m + 1 \end{array}\right.$

$\Rightarrow A(m+1;m-3)$, $B(m-1;m+1)$ $\Rightarrow \overrightarrow{OA} = (m+1;m-3)$, $\overrightarrow{OB} = (m-1;m+1)$.

ΔOAB vuông tại O $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 2 \end{array}\right.$.

Câu 35. Cho hàm số $y = 2x^2 - 3(m+1)x^2 + 6mx + m^3$ (1)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.

2) Tìm *m* để đồ thị của hàm số (1) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC vuông tại C, với $C(4;0)$.

• *Ta có:* $y' = 6(x-1)(x-m)$. *Hàm số có CĐ, CT* $\Leftrightarrow$ $y' = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt* $\Leftrightarrow$ $m \neq 1$.

Khi đó các điểm cực trị là $A(1;m^3 + 3m - 1), B(m;3m^2)$.

ΔABC *vuông tại C* $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow (m+1)\left[m^2(m^2 - m + 1) + 3m^2 - 5m + 4\right] = 0$

$\Leftrightarrow m = -1$

Câu 36. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + m$ (1)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = -4$.

2) Xác định *m* để đồ thị của hàm số (1) có hai điểm cực trị A, B sao cho $\widehat{AOB} = 120^0$.

• *Ta có:* $y' = 3x^2 + 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \Rightarrow y = m + 4 \\ x = 0 \ \ \Rightarrow y = m \end{array}\right.$

Vậy hàm số có hai điểm cực trị A(0 ; m) và B(−2 ; m + 4)

$\overrightarrow{OA} = (0;m), \ \overrightarrow{OB} = (-2;m+4)$. *Để* $\widehat{AOB} = 120^0$ *thì* $\cos AOB = -\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{m(m+4)}{\sqrt{m^2\left(4 + (m+4)^2\right)}} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{m^2\left(4 + (m+4)^2\right)} = -2m(m+4) \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m < 0 \\ 3m^2 + 24m + 44 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m < 0 \\ m = \dfrac{-12 \pm 2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{-12 + 2\sqrt{3}}{3}$$

Câu 37. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m^2 - m + 1$ (1)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi *m* = 1.

2) Tìm *m* để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực đại, cực tiểu là A và B sao cho diện tích tam giác ABC bằng 7, với điểm C(–2; 4).

• *Ta có* $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 2$ $\Rightarrow$ *Hàm số luôn có CĐ, CT.*

Các điểm CĐ, CT của đồ thị là: $A(0;m^2 - m + 1)$, $B(2;m^2 - m - 3)$, $AB = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5}$

Phương trình đường thẳng AB: $\dfrac{x - 0}{2} = \dfrac{y - m^2 + m - 1}{-4} \Leftrightarrow 2x + y - m^2 + m - 1 = 0$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}d(C, AB).AB = \frac{1}{2}.\frac{\left|m^2 - m + 1\right|}{\sqrt{5}}.2\sqrt{5} = \left|m^2 - m + 1\right| = 7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = -2 \end{array}\right..$$

<u>Câu hỏi tương tự</u>:

a) $y = x^3 - 3mx + 2, C(1;1), S = \sqrt{18}$. *ĐS:* $m = 2$.

Câu 38. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 12mx - 3m + 4$ (C)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số *m* = 0.

2) Tìm *m* để hàm số có hai cực trị là *A* và *B* sao cho hai điểm này cùng với điểm $C\left(-1;-\dfrac{9}{2}\right)$ lập thành tam giác nhận gốc tọa độ *O* làm trọng tâm.

• *Ta có* $y' = 3x^2 - 3(m+1)x + 12m$. *Hàm số có hai cực trị* $\Leftrightarrow$ $y' = 0$ *có hai nghiệm phân biệt* $\Leftrightarrow \Delta = (m-1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ *(*). Khi đó hai cực trị là* $A(2;9m), B(2m;-4m^3 + 12m^2 - 3m + 4)$.

ΔABC nhận O làm trọng tâm $\Leftrightarrow \begin{cases} 2+2m-1=0 \\ -4m^3+12m^2+6m+4-\dfrac{9}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{2}$ *(thoả (*)).*

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)=2x^3+3(m-3)x^2+11-3m$ (C_m).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = 2.

2) Tìm *m* để (C_m) có hai điểm cực trị M_1, M_2 sao cho các điểm M_1, M_2 và B(0; –1) thẳng hàng.

- $y'=6x^2+6(m-3)$. $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3-m \end{array}\right.$. *Hàm số có 2 cực trị* $\Leftrightarrow m \neq 3$ *(*).*

Chia $f(x)$ *cho* $f'(x)$ *ta được:* $f(x)=f'(x)\left(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{m-3}{6}\right)-(m-3)^2x+11-3m$

$\Rightarrow$ *phương trình đường thẳng* M_1M_2 *là:* $y=-(m-3)^2x+11-3m$

M_1, M_2, B *thẳng hàng* $\Leftrightarrow B \in M_1M_2 \Leftrightarrow m=4$ *(thoả (*)).*

Câu 40. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-1)x+1$ (C_m).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m=2$.

2) Tìm *m* để hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{CĐ}+y_{CT}>2$.

- *Ta có:* $y'=x^2-2mx+m^2-1$. $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m+1 \\ x=m-1 \end{array}\right.$.

$y_{CĐ}+y_{CT}>2 \Leftrightarrow 2m^3-2m+2>2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<m<0 \\ m>1 \end{array}\right.$.

Câu 41. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-(m+1)x^2+\dfrac{4}{3}(m+1)^3$ (1) (*m* là tham số thực).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = 1.

2) Tìm *m* để các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị (1) nằm về 2 phía (phía trong và phía ngoài) của đường tròn có phương trình (C): $x^2+y^2-4x+3=0$.

- $y'=x^2-2(m+1)x$. $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2(m+1) \end{array}\right.$. *Hàm số có cực trị* $\Leftrightarrow m \neq -1$ *(1)*

Gọi hai điểm cực trị của đồ thị là: $A\left(0;\dfrac{4}{3}(m+1)^3\right)$, $B(2(m+1);0)$.

(C) có tâm I(2; 0), bán kính R = 1. $IA=\sqrt{4+\dfrac{16}{9}(m+1)^6}$, $IB=\sqrt{4m^2}$.

A, B nằm về hai phía của (C) $\Leftrightarrow (IA^2-R^2)(IB^2-R^2)<0 \Leftrightarrow 4m^2-1<0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}<m<\dfrac{1}{2}$ *(2)*

Kết hợp (1), (2), ta suy ra: $-\dfrac{1}{2}<m<\dfrac{1}{2}$.

Câu 42. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3$ (C_m)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m=-2$.

2) Chứng minh rằng (C_m) luôn có điểm cực đại và điểm cực tiểu lần lượt chạy trên mỗi đường thẳng cố định.

- $y'=3x^2-6mx+3(m^2-1)$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m+1 \\ x=m-1 \end{array}\right.$

Điểm cực đại $M(m-1;2-3m)$ *chạy trên đường thẳng cố định:* $\begin{cases} x=-1+t \\ y=2-3t \end{cases}$

Điểm cực tiểu $N(m+1;-2-m)$ *chạy trên đường thẳng cố định:* $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2-3t \end{cases}$

Câu 43. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+1 \quad (C_m)$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = 1.

2) Tìm *m* để đồ thị (C*m*) có 2 điểm cực trị và khoảng cách giữa 2 điểm cực trị là nhỏ nhất.

• *Ta có:* $y'=x^2-2mx-1$; $y'=0$ *có* $\Delta'=m^2+1>0, \forall m$ $\Rightarrow$ *hàm số luôn có hai điểm cực trị* x_1, x_2. *Giả sử các điểm cực trị của (Cm) là* $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$.

Ta có: $y=\frac{1}{3}(x-m).y'-\frac{2}{3}(m^2+1)x+\frac{2}{3}m+1$

$\Rightarrow y_1=-\frac{2}{3}(m^2+1)x_1+\frac{2}{3}m+1$; $\quad y_2=-\frac{2}{3}(m^2+1)x_2+\frac{2}{3}m+1$

Do đó: $AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=(4m^2+4)\left[1+\frac{4}{9}(m^2+1)^2\right]\ge 4\left(1+\frac{4}{9}\right)$

$\Rightarrow AB\ge\frac{2\sqrt{13}}{3}$. *Dấu "=" xảy ra* $\Leftrightarrow m=0$. *Vậy* $\min AB=\frac{2\sqrt{13}}{3}$ *khi* $m=0$.

Câu 44. Cho hàm số $y=x^3-3x^2-mx+2 \quad (1)$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi *m* = 0.

2) Tìm *m* để hàm số (1) có 2 cực trị và đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo với hai trục toạ độ một tam giác cân.

• $y'=3x^2-6x-m$. *Hàm số có 2 cực trị* $\Leftrightarrow$ $y'=0$ *có 2 nghiệm phân biệt* $\Leftrightarrow m>-3$.

Ta có: $y=\frac{1}{3}(x-1).y'+\left(-\frac{2m}{3}-2\right)x+2-\frac{m}{3}$ $\Rightarrow$ *Đường thẳng Δ đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị có phương trình:* $y=\left(-\frac{2m}{3}-2\right)x+2-\frac{m}{3}$.

Δ cắt Ox, Oy tại $A\left(\frac{m-6}{2(m+3)};0\right)$, $B\left(0;\frac{6-m}{3}\right)$ *(m ≠ 0).*

Tam giác OAB cân $\Leftrightarrow OA=OB \Leftrightarrow \left|\frac{m-6}{2(m+3)}\right|=\left|\frac{6-m}{3}\right| \Leftrightarrow m=6; m=-\frac{9}{2}; m=-\frac{3}{2}$.

Đối chiếu điều kiện ta có $m=-\frac{3}{2}$.

Câu 45. Cho hàm số : y = $\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-m+1)x+1$ (1).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi *m* = 1.

2) Tìm *m* để hàm số có cực trị trong khoảng $(-\infty;1)$.

• *Tập xác định D = R.* $y'=x^2-2mx+m^2-m+1$.

Đặt $t=x-1 \Rightarrow x=t+1$ *ta được :* $y'=g(t)=t^2+2(1-m)t+m^2-3m+2$

Hàm số(1) có cực trị trong khoảng $(-\infty;1) \Leftrightarrow f(x)=0$ *có nghiệm trong khoảng* $(-\infty;1)$.

$$\Leftrightarrow g(t)=0 \text{ có nghiệm } t<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P<0 \\ \begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ S<0 \\ P \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2-3m+2<0 \\ \begin{cases} m-1 \ge 0 \\ 2m-2<0 \\ m^2-3m+2 \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 1<m<2$$

Vậy: Với $1<m<2$ *thì hàm số (1) có cực trị trong khoảng* $(-\infty;1)$

Câu 46. Cho hàm số : y = $\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ (1).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.
2) Tìm m để hàm số có cực trị trong khoảng $(1;+\infty)$.

• *Tập xác định D = R.* $y' = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1$.

Đặt $t = x-1 \Rightarrow x = t+1$ *ta được :* $y' = g(t) = t^2 + 2(1-m)t + m^2 - 3m + 2$

Hàm số(1) có cực trị trong khoảng $(1;+\infty)$ $\Leftrightarrow f(x)=0$ *có nghiệm trong khoảng* $(1;+\infty)$.

$$\Leftrightarrow g(t)=0 \text{ có nghiệm } t>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P<0 \\ \begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ S>0 \\ P \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2-3m+2<0 \\ \begin{cases} m-1 \ge 0 \\ 2m-2>0 \\ m^2-3m+2 \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 1<m$$

Vậy: Với $m>1$ *thì hàm số (1) có cực trị trong khoảng* $(1;+\infty)$

Câu 47. Cho hàm số : y = $\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ (1).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.
2) Tìm m để hàm số có hai cực trị x_1, x_2 thoả mãn $x_1 < 1 < x_2$.

• *Tập xác định D = R.* $y' = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1$.

Đặt $t = x-1 \Rightarrow x = t+1$ *ta được:* $y' = g(t) = t^2 + 2(1-m)t + m^2 - 3m + 2$

(1) có hai cực trị x_1, x_2 *thoả* $x_1 < 1 < x_2$ $\Leftrightarrow g(t)=0$ *có hai nghiệm* t_1, t_2 *thoả* $t_1 < 0 < t_2$

$\Leftrightarrow P<0 \Leftrightarrow m^2-3m+2<0 \Leftrightarrow 1<m<2$

Vậy: Với $1<m<2$ *thì hàm số (1) có hai cực trị* x_1, x_2 thoả mãn $x_1 < 1 < x_2$.

Câu 48. Cho hàm số : y = $\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ (1).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.
2) Tìm m để hàm số có hai cực trị x_1, x_2 thoả mãn $x_1 < x_2 < 1$.

• *Tập xác định D = R.* $y' = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1$.

Đặt $t = x-1 \Rightarrow x = t+1$ *ta được :* $y' = g(t) = t^2 + 2(1-m)t + m^2 - 3m + 2$

(1) có hai cực trị x_1, x_2 *thoả* $x_1 < x_2 < 1$ $\Leftrightarrow g(t)=0$ *có hai nghiệm* t_1, t_2 *thoả* $t_1 < t_2 < 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S<0 \\ P>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1>0 \\ m^2-3m+2>0 \\ 2m-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing$. *Vậy: Không có giá trị nào của m nào thoả YCBT.*

Câu 49. Cho hàm số : y = $\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ (1).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.
2) Tìm m để hàm số có hai cực trị x_1, x_2 thoả mãn $1 < x_1 < x_2$.

• *Tập xác định D = R.* $y' = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1$.

Đặt $t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1$ *ta được :* $y' = g(t) = t^2 + 2\left(1 - m\right)t + m^2 - 3m + 2$

(1) có hai cực trị x_1, x_2 *thoả* $1 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow g(t) = 0$ *có hai nghiệm* t_1, t_2 *thoả* $0 < t_1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 > 0 \\ m^2 - 3m + 2 > 0 \\ 2m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2$$

Vậy: Với $m > 2$ *thì hàm số (1) có hai cực trị* x_1, x_2 *thoả mãn* $1 < x_1 < x_2$.

Dạng 2: Cực trị của hàm số trùng phương: $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$

A. Kiến thức cơ bản

- Hàm số luôn nhận $x = 0$ làm 1 điểm cực trị.
- Hàm số có 1 cực trị ⇔ phương trình $y' = 0$ có 1 nghiệm.
- Hàm số có 3 cực trị ⇔ phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.
- Khi đồ thị có 3 điểm cực trị $A(0;c), B(x_1;y_1), C(x_2;y_2)$ thì ΔABC cân tại A.

B. Một số dạng câu hỏi thường gặp

1. Tìm điều kiện để đồ thị hàm số có các điểm cực trị tạo thành tam giác vuông cân hoặc tam giác đều.

– Tìm điều kiện để phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

– Tìm toạ độ các điểm cực trị A, B, C. Lập luận chỉ ra ΔABC cân tại A.

– Giải điều kiện: ΔABC vuông tại A ⇔ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

ΔABC đều ⇔ $AB = BC$

2. Tìm điều kiện để đồ thị hàm số có các điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích S cho trước.

– Tìm điều kiện để phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

– Tìm toạ độ các điểm cực trị A, B, C. Lập luận chỉ ra ΔABC cân tại A.

– Kẻ đường cao AH.

– Giải điều kiện: $S = S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC$.

Câu 50. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m^2 - m + 1)x^2 + m - 1$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số .
2) Tìm *m* để đồ thị (C) có khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu ngắn nhất.

- $y' = 4x^3 - 4(m^2 - m + 1)x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m^2 - m + 1} \end{array}\right.$.

Khoảng cách giữa các điểm cực tiểu: $d = 2\sqrt{m^2 - m + 1} = 2\sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$

$\Rightarrow \min d = \sqrt{3} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Câu 51. Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - mx^2 + \frac{3}{2}$ (1)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 3$.
2) Xác định *m* để đồ thị của hàm số (1) có cực tiểu mà không có cực đại.

- $y' = 2x^3 - 2mx = 2x(x^2 - m)$. $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$

Đồ thị của hàm số (1) có cực tiểu mà không có cực đại ⇔ PT $y' = 0$ có 1 nghiệm ⇔ $m \le 0$

Câu 52. Cho hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 - 4$ (C_m) .

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 2$.
2) Tìm các giá trị của *m* để tất cả các điểm cực trị của (C_m) đều nằm trên các trục toạ độ.

• *Ta có:* $y' = -4x^3 + 4mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$.

+ Nếu $m \le 0$ *thì đồ thị có 1 điểm cực trị duy nhất* $(0;-4) \in Oy$.

+ Nếu $m > 0$ *thì* (C_m) *có 3 điểm cực trị* $A(0;-4), B(-\sqrt{m}; m^2-4), C(\sqrt{m}; m^2-4)$.

Để A, B, C nằm trên các trục toạ độ thì B, C $\in Ox \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$.

Vậy: $m \le 0$ *hoặc* $m = 2$.

Câu 53. Cho hàm số $y = x^4 + (3m+1)x^2 - 3$ (với m là tham số).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = -1$.
2) Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác cân sao cho độ dài cạnh đáy bằng $\frac{2}{3}$ lần độ dài cạnh bên.

• *Ta có:* $y' = 4x^3 + 2(3m+1)x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0, x^2 = -\frac{3m+1}{2}$.

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m < -\frac{1}{3}$ *(*). Ba điểm cực trị là:*

$A(0;-3)$; $B\left(\sqrt{\frac{-3m-1}{2}}; \frac{-(3m+1)^2}{4} - 3\right)$; $C\left(-\sqrt{\frac{-3m-1}{2}}; \frac{-(3m+1)^2}{4} - 3\right)$

ΔABC *cân tại* A ; $BC = \frac{2}{3}AB \Leftrightarrow 9.4\left(\frac{-3m-1}{2}\right) = 4\left(\frac{-3m-1}{2} + \frac{(3m+1)^4}{16}\right) \Leftrightarrow m = -\frac{5}{3}$, *thoả (*).*

Câu 54. Cho hàm số $y = f(x) = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5$ (C_m).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) hàm số khi $m = 1$.
2) Tìm các giá trị của *m* để đồ thị (C_m) của hàm số có các điểm cực đại, cực tiểu tạo thành 1 tam giác vuông cân.

• *Ta có* $f'(x) = 4x^3 + 4(m-2)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 2 - m \end{array}\right.$

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow$ *PT* $f'(x) = 0$ *có 3 nghiệm phân biệt* $\Leftrightarrow m < 2$ *(*)*

Khi đó toạ độ các điểm cực trị là: $A\left(0; m^2 - 5m + 5\right), B\left(\sqrt{2-m}; 1-m\right), C\left(-\sqrt{2-m}; 1-m\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(\sqrt{2-m}; -m^2 + 4m - 4\right), \overrightarrow{AC} = \left(-\sqrt{2-m}; -m^2 + 4m - 4\right)$

Do ΔABC *luôn cân tại A, nên bài toán thoả mãn khi* ΔABC *vuông tại A*

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (m-2)^3 = -1 \Leftrightarrow m = 1$ *(thoả (*))*

Câu 55. Cho hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5$ $\left(C_m\right)$
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$.
2) Với những giá trị nào của *m* thì đồ thị (C_m) có điểm cực đại và điểm cực tiểu, đồng thời các điểm cực đại và điểm cực tiểu lập thành một tam giác đều.

• *Ta có* $f'(x) = 4x^3 + 4(m-2)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 2 - m \end{array}\right.$

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow$ *PT* $f'(x) = 0$ *có 3 nghiệm phân biệt* $\Leftrightarrow m < 2$ *(*)*

Khi đó toạ độ các điểm cực trị là: $A\left(0; m^2 - 5m + 5\right), B\left(\sqrt{2-m}; 1-m\right), C\left(-\sqrt{2-m}; 1-m\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(\sqrt{2-m}; -m^2 + 4m - 4\right), \overrightarrow{AC} = \left(-\sqrt{2-m}; -m^2 + 4m - 4\right)$

Do ΔABC luôn cân tại A, nên bài toán thoả mãn khi $\widehat{A} = 60^0 \Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = 2 - \sqrt[3]{3}.$$

(Chú ý: Có thể dùng tính chất: ΔABC đều ⇔ AB = BC = CA).

Câu hỏi tương tự:

a) $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$. ĐS: $m = \sqrt[3]{3}$

b) $y = x^4 - 4(m-1)x^2 + 2m - 1$. ĐS: $m = 1 + \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$

c) $y = x^4 - 4(m-1)x^2 + 2m - 1$

Câu 56. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có đồ thị (C_m).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = 1.

2) Với những giá trị nào của *m* thì đồ thị (C_m) có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó lập thành một tam giác có diện tích $S = 4$.

• *Ta có* $y' = 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ g(x) = x^2 - m = 0 \end{array}\right.$

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ *có 3 nghiệm phân biệt* $\Leftrightarrow \Delta_g = m > 0 \Leftrightarrow m > 0$ *(*)*

Với điều kiện (*), phương trình $y' = 0$ *có 3 nghiệm* $x_1 = -\sqrt{m}; x_2 = 0; x_3 = \sqrt{m}$. *Hàm số đạt cực trị tại* $x_1; x_2; x_3$. *Gọi* $A(0; 2m + m^4); B\left(\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m\right); C\left(-\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m\right)$ *là 3 điểm cực trị của* (C_m).

Ta có: $AB^2 = AC^2 = m^4 + m; BC^2 = 4m \Rightarrow \Delta ABC$ *cân đỉnh A*

Gọi M là trung điểm của BC $\Rightarrow M(0; m^4 - m^2 + 2m) \Rightarrow AM = |m^2| = m^2$

Vì ΔABC cân tại A nên AM cũng là đường cao, do đó:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AM.BC = \frac{1}{2}.m^2.\sqrt{4m} = 4 \Leftrightarrow m^{\frac{5}{2}} = 4 \Leftrightarrow m^5 = 16 \Leftrightarrow m = \sqrt[5]{16}. \text{ Vậy } m = \sqrt[5]{16}.$$

Câu hỏi tương tự:

a) $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$, *S* = 32. ĐS: $m = \pm 2$

b) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2mx^2 + m$, $S = 32\sqrt{2}$. ĐS: $m = 2$

c) $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + m$, *S* = 32. ĐS: $m = \pm 2$

d) $y = x^4 - 2mx^2 + 2m^2 - 4$, $S = 1$. ĐS: $m = 1$

Câu 57. Cho hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$ có đồ thị (C_m).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = –2.

2) Với những giá trị nào của *m* thì đồ thị (C_m) có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó lập thành một tam giác có một góc bằng 120^0.

• *Ta có* $y' = 4x^3 + 4mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 + m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{-m} \end{array}\right.$ *(m < 0)*

Khi đó các điểm cực trị là: $A(0; m^2 + m), B\left(\sqrt{-m}; m\right), C\left(-\sqrt{-m}; m\right)$

$\overrightarrow{AB} = (\sqrt{-m}; -m^2)$; $\overrightarrow{AC} = (-\sqrt{-m}; -m^2)$. *ΔABC cân tại A nên góc* 120° *chính là* $\widehat{A}$.

$$\widehat{A}=120^\circ \Leftrightarrow \cos A=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \frac{-\sqrt{-m}.\sqrt{-m}+m^4}{m^4-m}=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m+m^4}{m^4-m}=-\frac{1}{2}\Rightarrow 2m+2m^4=m-m^4\Leftrightarrow 3m^4+m=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \quad (loại) \\ m=-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\end{array}\right.. \text{ Vậy } m=-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

Câu 58. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m-1$ có đồ thị (C_m).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m=1$.
2) Với những giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó lập thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

• *Ta có* $y'=4x^3-4mx=4x(x^2-m)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m\end{array}\right.$

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ *PT* $y'=0$ *có ba nghiệm phân biệt và* y' *đổi dấu khi* x *đi qua các nghiệm đó* $\Leftrightarrow m>0$. *Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị (Cm) là:*

$$A(0;m-1),\ B\left(-\sqrt{m};-m^2+m-1\right),\ C\left(\sqrt{m};-m^2+m-1\right)$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|y_B-y_A|.|x_C-x_B|=m^2\sqrt{m};\ AB=AC=\sqrt{m^4+m},\ BC=2\sqrt{m}$$

$$R=\frac{AB.AC.BC}{4S_{\Delta ABC}}=1\Leftrightarrow \frac{(m^4+m)2\sqrt{m}}{4m^2\sqrt{m}}=1\Leftrightarrow m^3-2m+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\end{array}\right.$$

<u>*Câu hỏi tương tự:*</u>

a) $y=x^4-2mx^2+1$ *ĐS:* $m=1,\ m=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Câu 59. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+2$ (C*m*).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m=1$.
2) Tìm các giá trị của *m* để (C*m*) có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có đường tròn ngoại tiếp đi qua điểm $D\left(\frac{3}{5};\frac{9}{5}\right)$.

• *Ta có:* $y'=4x^3-4mx;\ y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m\end{array}\right.$. *Hàm số có 3 điểm cực trị* $\Leftrightarrow m>0$.

Khi đó các điểm cực trị của (Cm) là: $A(0;2), B(-\sqrt{m};-m^2+2), C(\sqrt{m};-m^2+2)$.

Gọi $I(x;y)$ *là tâm của đường tròn (P) ngoại tiếp* ΔABC.

Ta có: $\begin{cases} IA^2=ID^2 \\ IB^2=IC^2 \\ IB^2=IA^2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y+1=0 \\ 2x\sqrt{m}=-2x\sqrt{m} \\ (x+\sqrt{m})^2+(y+m^2-2)^2=x^2+(y-2)^2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ m=1\end{cases}$. *Vậy* $m=1$.

Câu 60. Cho hàm số $y=x^4-2(1-m^2)x^2+m+1$ (C*m*).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m=0$.
2) Tìm *m* để đồ thị (C*m*) có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích lớn nhất.

• $y'=4x^3-4(1-m^2)x;\ y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=1-m^2\end{array}\right.$. *Hàm số có 3 cực trị* $\Leftrightarrow -1<m<1$.

Khi đó các điểm cực trị của (Cm) là:

$$A(0;1+m),\ B\left(-\sqrt{1-m^2};\sqrt{1-m^2}\right),\ C\left(\sqrt{1-m^2};\sqrt{1-m^2}\right)$$

Ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2}d(A,BC).BC = (1-m^2)^2 \le 1$. *Dấu "=" xảy ra* $\Leftrightarrow m = 0$.

Vậy $\max S_{ABC} = 1 \Leftrightarrow m = 0$.

Câu 61. Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - (3m+1)x^2 + 2(m+1)$ (C*m*).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 0$.

2) Tìm *m* để đồ thị (C*m*) có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có trọng tâm là gốc toạ độ O.

- $y' = x^3 - 2(3m+1)x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 2(3m+1) \end{array}\right.$. *Hàm số có 3 cực trị* $\Leftrightarrow m > -\frac{1}{3}$ *(*)*

Khi đó toạ độ 3 điểm cực trị là:

$$A(0;2m+2), B(-\sqrt{6m+2};-9m^2-4m+1), C(\sqrt{6m+2};-9m^2-4m+1)$$

ΔABC có trọng tâm O $\Leftrightarrow -18m^2 - 6m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{2}{3}; m = \frac{1}{3}$

Đối chiếu với điều kiện (*), suy ra $m = \frac{1}{3}$.

KSHS 03: SỰ TƯƠNG GIAO

Dạng 1: Sự tương giao của đồ thị hàm số bậc 3: $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$

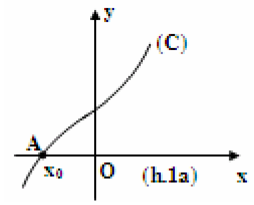
A. Kiến thức cơ bản

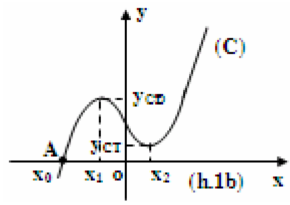
- Cho hai đồ thị (C_1): $y = f(x)$ và (C_2): $y = g(x)$. Để tìm hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) ta giải phương trình: $f(x) = g(x)$ (*) (gọi là phương trình hoành độ giao điểm).
Số nghiệm của phương trình (*) bằng số giao điểm của hai đồ thị.
- Số giao điểm của đồ thị (C) của hàm số bậc ba: $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với trục hoành bằng số nghiệm của phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (1)

B. Một số dạng câu hỏi thường gặp

1. Tìm điều kiện để đồ thị (C) và trục hoành có 1 điểm chung duy nhất.

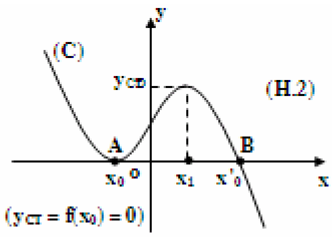
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f \text{ không có cực trị} \\ \begin{cases} f \text{ có 2 cực trị} \\ y_{CĐ}.y_{CT} > 0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \text{Phương trình (1) có 1 nghiệm duy nhất}$$

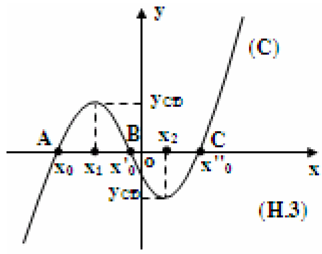




2. Tìm điều kiện để đồ thị (C) và trục hoành có 2 điểm chung phân biệt.

$$\Leftrightarrow \text{(C) tiếp xúc với Ox} \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ có 2 cực trị} \\ y_{CĐ}.y_{CT} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{Phương trình (1) có đúng 2 nghiệm}$$



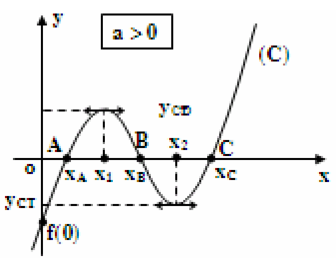


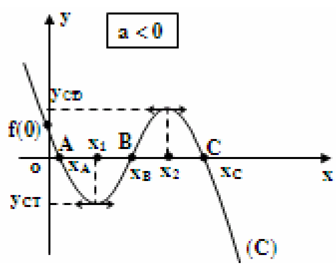
3. Tìm điều kiện để đồ thị (C) và trục hoành có 3 điểm chung phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ có 2 cực trị} \\ y_{CĐ}.y_{CT} < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \text{Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt}$$

4. Tìm điều kiện để đồ thị (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương.

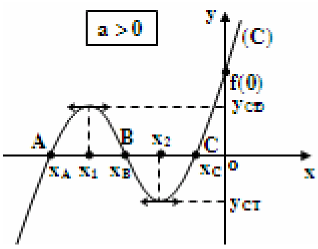
$$\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ có 2 cực trị} \\ y_{CĐ}.y_{CT} < 0 \\ x_{CĐ} > 0,\ x_{CT} > 0 \\ a.f(0) < 0 \ (hay\ ad < 0) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \text{Phương trình (1) có 3 nghiệm dương phân biệt.}$$

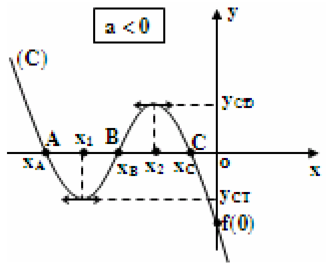




5. Tìm điều kiện để đồ thị (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ âm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ có 2 cực trị} \\ y_{CĐ}.y_{CT} < 0 \\ x_{CĐ} < 0,\ x_{CT} < 0 \\ a.f(0) > 0 \ (hay\ ad > 0) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \text{Phương trình (1) có 3 nghiệm âm phân biệt.}$$





6. Tìm điều kiện để đồ thị (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ tạo thành một cấp số cộng.

a,b,c *lập thành một cấp số cộng* $\Leftrightarrow a + c = 2b$

– Giả sử (1) có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số cộng.

– Viết (1) dưới dạng: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$

$$\Leftrightarrow a\left[x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3\right] = 0$$

– x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow x_1 + x_3 = 2x_2 \Rightarrow x_2 = -\dfrac{b}{3a}$ là 1 nghiệm của (1).

– Thế $x_2 = -\dfrac{b}{3a}$ vào (1) để suy ra điều kiện cần tìm.

Chú ý: Đây chỉ là điều kiện cần nên phải thử lại kết quả tìm được.

7. Tìm điều kiện để đồ thị (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ tạo thành một cấp số nhân.

a,b,c *lập thành một cấp số nhân* $\Leftrightarrow ac = b^2$

– Giả sử (1) có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số nhân.

– Viết (1) dưới dạng: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$

$$\Leftrightarrow a\left[x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3\right] = 0$$

– x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số nhân $\Leftrightarrow x_1x_3 = x_2^2 \Rightarrow x_2^3 = -\dfrac{d}{a}$ là 1 nghiệm của (1).

– Thế $x_2 = \sqrt[3]{-\dfrac{d}{a}}$ vào (1) để suy ra điều kiện cần tìm.

Chú ý: Đây chỉ là điều kiện cần nên phải thử lại kết quả tìm được.

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 + mx + 2$ có đồ thị (C_m)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = -3$.

2) Tìm m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

• *PT hoành độ giao điểm của (C_m) với trục hoành:* $x^3 + mx + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -x^2 - \frac{2}{x} \ (x \neq 0)$

Xét hàm số: $f(x) = -x^2 - \frac{2}{x} \Rightarrow f'(x) = -2x + \frac{2}{x^2} = \frac{-2x^3 + 2}{x^2}$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$

Đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại một điểm duy nhất $\Leftrightarrow m > -3$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - mx^2 + 2m$ (Cm) (m là tham số).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 3$.

2) Tìm m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

• *Ta có:* $y' = 3x^2 - 2mx = x(3x - 2m)$

+ Khi m = 0 thì $y' = 3x^2 \geq 0 \Rightarrow$ *(1) đồng biến trên R* $\Rightarrow$ *thoả yêu cầu bài toán.*

+ Khi $m \neq 0$ *thì (1) có 2 cực trị* $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2m}{3}$. *Do đó đồ thị cắt Ox tại duy nhất 1 điểm khi*

$$f(x_1).f(x_2) > 0 \Leftrightarrow 2m\left(2m - \frac{4m^3}{27}\right) > 0 \Leftrightarrow 4m^2\left(1 - \frac{2m^2}{27}\right) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -\frac{3\sqrt{6}}{2} < m < \frac{3\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

Kết luận: khi $m \in \left(-\frac{3\sqrt{6}}{2}; \frac{3\sqrt{6}}{2}\right)$ *thì đồ thị (Cm) cắt Ox tại duy nhất một điểm.*

Câu hỏi tương tự:

a) $y = x^3 + 3(m+1)x^2 + 3(m^2+1)x + 1$ *ĐS:* $m \in R$.

Câu 3. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx - 2$ có đồ thị (C_m)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$.

2) Tìm m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

• $y' = 6x^2 - 6(m+1)x + 6m$; $\Delta'_{y'} = 9(m+1)^2 - 36m = 9(m-1)^2$.

+ Nếu $m = 1$ *thì* $y' \geq 0, \forall x$ $\Rightarrow$ *hàm số đồng biến trên R* $\Rightarrow$ *đồ thị cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất* $\Rightarrow$ $m = 1$ *thoả mãn YCBT.*

+ Nếu $m \neq 1$ *thì hàm số có các điểm cực trị* x_1, x_2 *(*x_1, x_2 *là các nghiệm của PT* $y' = 0$*)*

$\Rightarrow x_1 + x_2 = m + 1; x_1x_2 = m$.

Lấy y chia cho y′ ta được: $y = \left(\frac{x}{3} - \frac{m+1}{6}\right)y' - (m-1)^2 x - 2 + m(m+1)$.

$\Rightarrow$ *PT đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là:* $y = -(m-1)^2 x - 2 + m(m+1)$

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất $\Leftrightarrow y_{CĐ}.y_{CT} > 0$

$\Leftrightarrow \left(-(m-1)^2 x_1 - 2 + m(m+1)\right).\left(-(m-1)^2 x_2 - 2 + m(m+1)\right) > 0$

$\Leftrightarrow (m-1)^2(m^2 - 2m - 2) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 2 < 0$ *(vì m ≠ 1)* $\Leftrightarrow 1 - \sqrt{3} < m < 1 + \sqrt{3}$.

Kết luận: $1 - \sqrt{3} < m < 1 + \sqrt{3}$.

Câu 4. Cho hàm số $y = x^3 - 3m^2x + 2m$ có đồ thị (C_m).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$.
2) Tìm m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại đúng hai điểm phân biệt.

• *Để (C_m) cắt trục hoành tại đúng hai điểm phân biệt thì (C_m) phải có 2 điểm cực trị*

$\Rightarrow y'=0$ *có 2 nghiệm phân biệt* $\Leftrightarrow 3x^2 - 3m^2 = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt* $\Leftrightarrow m \neq 0$

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm m$.

(C_m) cắt Ox tại đúng 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow y_{CĐ} = 0$ *hoặc* $y_{CT} = 0$

Ta có: $+\ y(-m) = 0 \Leftrightarrow 2m^3 + 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ *(loại)*

$+\ y(m) = 0 \Leftrightarrow -2m^3 + 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \vee m = \pm 1$

Vậy: $m = \pm 1$

Câu 5. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm m để đường thẳng (Δ): $y = (2m-1)x - 4m - 1$ cắt đồ thị (C) tại đúng hai điểm phân biệt.

• *Phương trình hoành độ giao của (C) và (Δ):* $x^3 - 3x^2 - (2m-1)x + 4m + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 - x - 2m - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ f(x) = x^2 - x - 2m - 1 = 0 \quad (1) \end{array}\right.$$

(Δ) cắt (C) tại đúng 2 điểm phân biệt ⇔ (1) phải có nghiệm x_1, x_2 *thỏa mãn:* $\left[\begin{array}{l} 2 \neq x_1 = x_2 \\ x_1 = 2 \neq x_2 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta = 0 \\ -\dfrac{b}{2a} \neq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(2) = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 8m + 5 = 0 \\ \dfrac{1}{2} \neq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 8m + 5 > 0 \\ -2m + 1 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\dfrac{5}{8} \\ m = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. . \qquad \textit{Vậy: } m = -\frac{5}{8}\ ;\ m = \frac{1}{2}.$$

Câu 6. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 6$ có đồ thị là (C).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Định m để đường thẳng $(d): y = mx - 2m - 4$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt.

• *PT hoành độ giao điểm của (C) và (d):* $x^3 - 6x^2 + 9x - 6 = mx - 2m - 4$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 4x + 1 - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ g(x) = x^2 - 4x + 1 - m = 0 \end{array}\right.$$

(d) cắt (C) tại ba điểm phân biệt ⇔ PT $g(x) = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt khác 2* $\Leftrightarrow m > -3$

Câu 7. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2-1)x - (m^2-1)$ (m là tham số) (1).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 0$.
2) Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương.

• *Đồ thị (1) cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương* $\Leftrightarrow \begin{cases} (1) \text{ có 2 cực trị} \\ y_{CĐ}.y_{CT} < 0 \\ x_{CĐ} > 0, x_{CT} > 0 \\ a.y(0) < 0 \end{cases}$ *(*)*

$+\ y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2-1)$ $\quad +\ \Delta_{y'} = 9(m^2 - m^2 + 1) = 9 > 0, \forall m$ $\quad +\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m - 1 = x_{CĐ} \\ x = m + 1 = x_{CT} \end{array}\right.$

Suy ra: (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} m-1>0 \\ m+1>0 \\ (m^2-1)(m^2-3)(m^2-2m-1)<0 \\ -(m^2-1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{3}<m<1+\sqrt{2}$

Câu 8. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+\frac{2}{3}$ có đồ thị (C_m).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m=-1$.

2) Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có tổng bình phương các hoành độ lớn hơn 15.

• *YCBT* $\Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+\frac{2}{3}=0$ *(*) có 3 nghiệm phân biệt thỏa* $x_1^2+x_2^2+x_3^2>15$.

Ta có: (*) $\Leftrightarrow (x-1)(x^2+(1-3m)x-2-3m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ g(x)=x^2+(1-3m)x-2-3m=0 \end{array}\right.$

YCBT $\Leftrightarrow g(x)=0$ *có 2 nghiệm* x_1, x_2 *phân biệt khác 1 và thỏa* $x_1^2+x_2^2>14 \Leftrightarrow |m|>1$

<u>Câu hỏi tương tự:</u>

a) Với $y=x^3-3mx^2-3x+3m+2$

Câu 9. Cho hàm số $y=x^3-3x^2-9x+m$, trong đó m là tham số thực.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho khi $m=0$.

2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

• *Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng*

$\Leftrightarrow$ *Phương trình* $x^3-3x^2-9x+m=0$ *có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng*

$\Leftrightarrow$ *Phương trình* $x^3-3x^2-9x=-m$ *có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng*

$\Leftrightarrow$ *Đường thẳng* $y=-m$ *đi qua điểm uốn của đồ thị (C)* $\Leftrightarrow -m=-11 \Leftrightarrow m=11$.

Câu 10. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+9x-7$ có đồ thị (C_m), trong đó m là tham số thực.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho khi $m=0$.

2) Tìm m để (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

• *Hoành độ các giao điểm là nghiệm của phương trình:* $x^3-3mx^2+9x-7=0$ *(1)*

Gọi hoành độ các giao điểm lần lượt là $x_1;x_2;x_3$ *ta có:* $x_1+x_2+x_3=3m$

Để $x_1;x_2;x_3$ *lập thành cấp số cộng thì* $x_2=m$ *là nghiệm của phương trình (1)*

$\Rightarrow -2m^3+9m-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\frac{-1+\sqrt{15}}{2} \\ m=\frac{-1-\sqrt{15}}{2} \end{array}\right.$. *Thử lại ta có* $m=\frac{-1-\sqrt{15}}{2}$ *là giá trị cần tìm.*

<u>Câu hỏi tương tự:</u>

a) $y=x^3-3mx^2+2m(m-4)x+9m^2-m$. *ĐS:* $m=1$.

Câu 11. Cho hàm số $y=x^3-3mx^2-mx$ có đồ thị (C_m), trong đó m là tham số thực.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho khi $m=1$.

2) Tìm m để (C_m) cắt đường thẳng *d*: $y=x+2$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số nhân.

• *Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và d:*

$$x^3-3mx^2-mx=x+2 \Leftrightarrow g(x)=x^3-3mx^2-(m+1)x-2=0$$

<u>Đk cần</u>: Giả sử (C) cắt d tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x_1;x_2;x_3$ *lần lượt lập thành cấp số nhân. Khi đó ta có:* $g(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

Suy ra: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3m \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=-m-1 \\ x_1x_2x_3=2 \end{cases}$

Vì $x_1x_3=x_2^2 \Rightarrow x_2^3=2 \Rightarrow x_2=\sqrt[3]{2}$ *nên ta có:* $-m-1=4+\sqrt[3]{2}.3m \Leftrightarrow m=-\dfrac{5}{3\sqrt[3]{2}+1}$

<u>Đk đủ</u>: Với $m=-\dfrac{5}{3\sqrt[3]{2}+1}$*, thay vào tính nghiệm thấy thỏa mãn.*

Vậy: $m=-\dfrac{5}{3\sqrt[3]{2}+1}$.

<u>Câu hỏi tương tự</u>:

a) $y=x^3-(3m+1)x^2+(5m+4)x-8$, $d\equiv Ox$. *ĐS:* $m=2$.

Câu 12. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm các giá trị của tham số *m* để đường thẳng $d: y=m(x-2)-2$ cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt A(2; –2), B, D sao cho tích các hệ số góc của tiếp tuyến tại B và D với đồ thị (C) đạt giá trị nhỏ nhất.

• *PT hoành độ giao điểm của (C) và d:* $x^3-3x^2+2=m(x-2)-2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ g(x)=x^2-x-2-m=0 \ \ (1) \end{array}\right.$.

(C) cắt d tại 3 điểm phân biệt A(2; –2), B, D $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=9+4m>0 \\ g(2)=-m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{9}{4}<m\neq 0$ *(*)*

Với điều kiện (*), gọi x_1,x_2 *là các nghiệm của (1) thì* $x_1+x_2=1,\ x_1x_2=-2-m$.

Ta có: $k=y'(x_1).y'(x_2)=(3x_1^2-6x_1)(3x_2^2-6x_2)=\ 9(m+1)^2-9\geq -9$ *với* $-\dfrac{9}{4}<m\neq 0$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m=-1$. *Vậy giá trị m cần tìm là* $m=-1$. *Khi đó* $k_{\min}=-9$.

Câu 13. Cho hàm số $y=-2x^3+6x^2+1$ (C)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (C) của hàm số.

2) Tìm *m* để đường thẳng $d: y=mx+1$ cắt (C) tại 3 điểm phân biệt A(0; 1), B, C sao cho B là trung điểm của đoạn thẳng AC.

• *PT hoành độ giao điểm của (C) và d:* $-2x^3+6x^2+1=mx+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\ (y=1) \\ 2x^2-6x+m=0\ \ (1) \end{array}\right.$

d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt A(0; 1), B, C $\Leftrightarrow$ *(1) có 2 nghiệm phân biệt* $x_1,x_2\neq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{9}{2};m\neq 0 \end{cases}$. *Khi đó* $B(x_1;mx_1+1),\ C(x_2;mx_2+1)$.

Vì B là trung điểm của AC nên $x_2=2x_1$ *(2). Mặt khác:* $\begin{cases} x_1+x_2=3 \\ x_1x_2=\dfrac{m}{2} \end{cases}$ *(3)*

Từ (2) và (3) suy ra $m=4$.

Câu 14. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ (1)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1).

2) Tìm m để đường thẳng $d: y = mx$ cắt (C) tại 3 điểm O(0; 0), A, B phân biệt. Chứng tỏ rằng khi m thay đổi, trung điểm I của đoạn AB luôn nằm trên một đường thẳng song song với trục tung.

• *PT hoành độ giao điểm của (C) và d:* $x^3 - 6x^2 + 9x = mx \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \ (y = 0) \\ x^2 - 6x + 9 - m = 0 \ (1) \end{array}\right.$

d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt O(0; 0), A, B ⇔ (2) có 2 nghiệm phân biệt x_A, x_B *khác 0*

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 9 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \neq 9$ (*). *Vì I là trung điểm của AB nên* $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = 3$

$\Rightarrow I \in \Delta$: $x = 3$ *(Δ // Oy).*

Câu 15. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m-1)x + m + 1$ (C*m*).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$.

2) Tìm các giá trị của m để đường thẳng $d: y = 2x - m - 1$ cắt đồ thị (C*m*) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn hoặc bằng 1.

• *PT hoành độ giao điểm của (Cm) và d:* $x^3 - 3mx^2 + (m-1)x + m + 1 = 2x - m - 1$ *(1)*

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 + (1-3m)x - 2m - 2 = 0 \quad (2) \end{array}\right.$

YCBT ⇔ (1) có 3 nghiệm phân biệt lớn hơn hoặc bằng 1 ⇔ (2) có 2 nghiệm phân biệt lớn hơn 1

Xét PT (2) ta có: $\Delta = 9m^2 + 2m + 9 > 0, \forall m$ *⇒ (2) luôn có 2 nghiệm phân biệt* x_1, x_2.

Do đó: (2) có 2 nghiệm phân biệt lớn hơn 1 $\Leftrightarrow 1 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow 0 < x_1 - 1 < x_2 - 1$ *(*)*

Đặt $t = x - 1$. *Khi đó (2)* $\Leftrightarrow t^2 + 3(1-m)t - 5m = 0$ (3)

(*) ⇔ (3) có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S = 3(m-1) > 0 \\ P = -5m > 0 \end{cases}$ *(vô nghiệm)*

Kết luận: không có giá trị m thoả YCBT.

Câu 16. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Viết phương trình đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt A, B, C sao cho $x_A = 2$ và $BC = 2\sqrt{2}$.

• *Với* $x_A = 2 \Rightarrow y_A = 4$. *PT đường thẳng d đia qua A(2; 4) có dạng:* $y = k(x-2) + 4$.

PT hoành độ giao điểm của (C) và d: $x^3 - 3x + 2 = k(x-2) + 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ g(x) = x^2 + 2x - k + 1 = 0 \end{array}\right.$

d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k \neq 9 \end{cases}$. *Khi đó toạ độ của* $B(x_1; y_1), C(x_2; y_2)$

thoả hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + 2x - k + 1 = 0 & (1) \\ y = kx - 2k + 4 & (2) \end{cases}$

Ta có: (1) $\Rightarrow |x_1 - x_2| = 2\sqrt{k}$; *(2)* $\Rightarrow |y_1 - y_2| = |k(x_1 - x_2)| = 2k\sqrt{k}$

$BC = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{4k + 4k^3} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 4k^3 + 4k - 8 = 0 \Leftrightarrow k = 1$. *Vậy* $d: y = x + 2$.

Câu 17. Cho hàm số $y=4x^3-6mx^2+1$ (C) (m là tham số).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m=1$.

2) Tìm các giá trị của m để đường thẳng $d: y=-x+1$ cắt đồ thị (C) tại 3 điểm A(0; 1), B, C phân biệt sao cho B, C đối xứng nhau qua đường phân giác thứ nhất.

• *PT hoành độ giao điểm của (C) và d:* $4x^3-6mx^2+1=-x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 4x^2-6mx+1=0 \;\; (1) \end{array}\right.$

d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt A(0; 1), B, C ⇔ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-\dfrac{2}{3} \\ m>\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$ *(*). Khi đó giả sử* $B(x_1;-x_1+1), C(x_2;-x_2+1)$.

B, C đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=y_2 \\ y_1=x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-x_2+1 \\ x_2=-x_1+1 \end{cases} \Leftrightarrow x_1+x_2=1$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{2}m=1 \Leftrightarrow m=\dfrac{2}{3}$ *(không thoả (*)). Vậy không có giá trị m thoả YCBT.*

Câu 18. Cho hàm số $y=x^3+2mx^2+(m+3)x+4$ có đồ thị là (C_m) (m là tham số).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C_1) của hàm số trên khi m = 1.

2) Cho đường thẳng (d): $y=x+4$ và điểm K(1; 3). Tìm các giá trị của m để (d) cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt A(0; 4), B, C sao cho tam giác KBC có diện tích bằng $8\sqrt{2}$.

• *Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và d là:* $x^3+2mx^2+(m+3)x+4=x+4$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \; (y=4) \\ g(x)=x^2+2mx+m+2=0 \;\; (1) \end{array}\right.$

(d) cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt A(0; 4), B, C ⇔ (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2-m-2>0 \\ g(0)=m+2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<-1 \vee m>2 \\ m\neq -2 \end{cases}$ *(*)*

Khi đó: $x_B+x_C=-2m;\ x_B.x_C=m+2$. *Mặt khác:* $d(K,d)=\dfrac{|1-3+4|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$. *Do đó:*

$S_{\Delta KBC}=8\sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}BC.d(K,d)=8\sqrt{2} \Leftrightarrow BC=16 \Leftrightarrow BC^2=256$

$\Leftrightarrow (x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2=256 \Leftrightarrow (x_B-x_C)^2+((x_B+4)-(x_C+4))^2=256$

$\Leftrightarrow 2(x_B-x_C)^2=256 \Leftrightarrow (x_B+x_C)^2-4x_Bx_C=128$

$\Leftrightarrow 4m^2-4(m+2)=128 \Leftrightarrow m^2-m-34=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{1\pm\sqrt{137}}{2}$ *(thỏa (*)). Vậy* $m=\dfrac{1\pm\sqrt{137}}{2}$.

<u>Câu hỏi tương tự</u>:

a) $y=x^3+2mx^2+3(m-1)x+2$, $d: y=-x+2$, $K(3;1), A(0;2), S=2\sqrt{2}$. *ĐS:* $m=0, m=3$

Câu 19. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+4$ có đồ thị là (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Gọi d_k là đường thẳng đi qua điểm $A(-1;0)$ với hệ số góc k ($k\in\mathbb{R}$). Tìm k để đường thẳng d_k cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C và 2 giao điểm B, C cùng với gốc toạ độ O tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

• *Ta có:* $d_k: y=kx+k \Leftrightarrow kx-y+k=0$

PT hoành độ giao điểm của (C_m) và d là:

$x^3-3x^2+4=kx+k \Leftrightarrow (x+1)\left[(x-2)^2-k\right]=0 \Leftrightarrow x=-1$ *hoặc* $(x-2)^2=k$

d_k *cắt (C) tại 3 điểm phân biệt* $\Leftrightarrow \begin{cases} k>0 \\ k\neq 9 \end{cases}$ *(*)*

Khi đó các giao điểm là $A(-1;0), B\left(2-\sqrt{k};3k-k\sqrt{k}\right), C\left(2+\sqrt{k};3k+k\sqrt{k}\right)$.

$BC=2\sqrt{k}\sqrt{1+k^2}$, $d(O,BC)=d(O,d_k)=\dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}$

$S_{\Delta OBC}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}.2\sqrt{k}.\sqrt{1+k^2}=1 \Leftrightarrow k\sqrt{k}=1 \Leftrightarrow k^3=1 \Leftrightarrow k=1$ *(thoả (*))*

Câu hỏi tương tự:

a) $y=x^3-3x^2+4;\ A(-1;0),\ S_{OBC}=8$. *ĐS:* $k=4$.

Câu 20. Cho hàm số $y=(2-m)x^3-6mx^2+9(2-m)x-2$ (C*m*) (*m* là tham số).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = 1.

2) Tìm *m* để đường thẳng $d: y=-2$ cắt (C*m*) tại ba điểm phân biệt $A(0;-2)$, B và C sao cho diện tích tam giác OBC bằng $\sqrt{13}$.

• *Phương trình hoành độ giao điểm là:* $(2-m)x^3-6mx^2+9(2-m)x-2=-2$ *(1)*

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ (2-m)x^2-6mx+9(2-m)=0 \quad (2) \end{array}\right.$

d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt A(0; –2), B, C ⇔ (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=9m^2-9(2-m)^2>0 \\ 2-m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ m\neq 2 \end{cases}$ *(*). Giả sử* $B(x_B;-2), C(x_C;-2)$ $(x_B\neq x_C)$.

Khi đó: $\begin{cases} x_B+x_C=\dfrac{6m}{2-m} \\ x_Bx_C=9 \end{cases}$. *Ta có:* $S_{\Delta OBC}=\dfrac{1}{2}d(O,BC).BC=\sqrt{13}$

$\Rightarrow BC=\sqrt{13} \Leftrightarrow \left(x_B+x_C\right)^2-4x_Bx_C=13 \Leftrightarrow \left(\dfrac{6m}{2-m}\right)^2-36=13 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{14}{13} \\ m=14 \end{array}\right.$ *(thoả (*)).*

Câu 21. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có đồ thị là (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Gọi E là tâm đối xứng của đồ thị (C). Viết phương trình đường thẳng qua E và cắt (C) tại ba điểm E, A, B phân biệt sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\sqrt{2}$.

• *Ta có: E(1; 0). PT đường thẳng Δ qua E có dạng* $y=k(x-1)$.

PT hoành độ giao điểm của (C) và Δ: $(x-1)(x^2-2x-2-k)=0$

Δ cắt (C) tại 3 điểm phân biệt ⇔ $x^2-2x-2-k=0$ *có 2 nghiệm phân biệt khác 1 ⇔* $k>-3$

$S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}d(O,\Delta).AB=|k|\sqrt{k+3} \Rightarrow |k|\sqrt{k+3}=\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=-1 \\ k=-1\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$

Vậy có 3 đường thẳng thoả YCBT: $y=-x+1;\ y=\left(-1\pm\sqrt{3}\right)(x-1)$.

Câu 22. Cho hàm số $y=x^3+3x^2+mx+1$ (*m* là tham số) (1)

1) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số khi *m* = 3.

2) Tìm *m* để đường thẳng d: *y* = 1 cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt *A*(0; 1), *B*, *C* sao cho các tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) tại *B* và *C* vuông góc với nhau.

• *PT hoành độ giao điểm của (1) và d:* $x^3 + 3x^2 + mx + 1 = 1 \Leftrightarrow x(x^2 + 3x + m) = 0$

d cắt (1) tại 3 điểm phân biệt A(0; 1), B, C $\Leftrightarrow m < \frac{9}{4}, m \neq 0$

Khi đó: x_B, x_C *là các nghiệm của PT:* $x^2 + 3x + m = 0 \Rightarrow x_B + x_C = -3; x_B.x_C = m$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại B là $k_1 = 3x_B^2 + 6x_B + m$ *và tại C là* $k_2 = 3x_C^2 + 6x_C + m$

Tiếp tuyến của (C) tại B và C vuông góc với nhau $\Leftrightarrow k_1.k_2 = -1 \Leftrightarrow 4m^2 - 9m + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow m = \frac{9 - \sqrt{65}}{8} \vee m = \frac{9 + \sqrt{65}}{8}$$

Câu 23. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có đồ thị (C) và đường thẳng (d): $y = mx + m + 3$.
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm *m* để (d) cắt (C) tại M(–1; 3), N, P sao cho tiếp tuyến của (C) tại N và P vuông góc với nhau.

• *Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d):* $x^3 \text{-} (m+3)x - m - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x - m - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \ (y = 3) \\ g(x) = x^2 - x - m - 2 = 0 \end{array}\right.$$

d cắt (1) tại 3 điểm phân biệt M(–1; 3), N, P $\Leftrightarrow m > -\frac{9}{4}, m \neq 0$

Khi đó: x_N, x_P *là các nghiệm của PT:* $x^2 - x - m - 2 = 0 \Rightarrow x_N + x_P = 1; x_N.x_P = -m - 2$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại N là $k_1 = 3x_N^2 - 3$ *và tại P là* $k_2 = 3x_P^2 - 3$

Tiếp tuyến của (C) tại N và P vuông góc với nhau $\Leftrightarrow k_1.k_2 = -1 \Leftrightarrow 9m^2 + 18m + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-3 + 2\sqrt{2}}{3} \vee m = \frac{-3 - 2\sqrt{2}}{3}$$

Câu 24. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ (C)
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Gọi (*d*) là đường thẳng đi qua điểm A(2; 0) có hệ số góc *k*. Tìm *k* để (*d*) cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, M, N sao cho hai tiếp tuyến của (C) tại M và N vuông góc với nhau.

• *PT đường thẳng (d):* $y = k(x - 2)$

+ *PT hoành độ giao điểm của (C) và (d):* $x^3 - 3x^2 + 4 = k(x - 2)$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 - x - 2 - k) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 = x_A \\ g(x) = x^2 - x - 2 - k = 0 \end{array}\right.$$

+ *(d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt A, M, N* $\Leftrightarrow$ *PT* $g(x) = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt, khác 2*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{9}{4} < k \neq 0 \qquad (*)$$

+ *Theo định lí Viet ta có:* $\begin{cases} x_M + x_N = 1 \\ x_M x_N = -k - 2 \end{cases}$

+ *Các tiếp tuyến tại M và N vuông góc với nhau* $\Leftrightarrow y'(x_M).y'(x_N) = -1$

$$\Leftrightarrow (3x_M^2 - 6x_M)(3x_N^2 - 6x_N) = -1 \Leftrightarrow 9k^2 + 18k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{3} \qquad \text{(thoả (*))}$$

Câu 25. Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ (C)
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Chứng minh rằng khi *m* thay đổi, đường thẳng (d): $y = m(x+1)+2$ luôn cắt đồ thị (C) tại một điểm M cố định và xác định các giá trị của *m* để (d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt M, N, P sao cho tiếp tuyến của (C) tại N và P vuông góc với nhau.

• *PT hoành độ giao điểm* $(x+1)(x^2-x-2-m)=0$ *(1)* $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ x^2-x-2-m=0 \quad (2) \end{array}\right.$

(1) luôn có 1 nghiệm $x=-1$ *(* $y=2$ *)* $\Rightarrow$ *(d) luôn cắt (C) tại điểm M(–1; 2).*

(d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ *(2) có 2 nghiệm phân biệt, khác –1*

$\Leftrightarrow m > -\frac{9}{4}; m \neq 0$ *(*)*

Tiếp tuyến tại N, P vuông góc $\Leftrightarrow y'(x_N).y'(x_P)=-1 \Leftrightarrow m = \frac{-3\pm 2\sqrt{2}}{3}$ *(thoả (*))*

Câu 26. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{8}{3}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Lập phương trình đường thẳng *d* song song với trục hoành và cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB cân tại O (O là gốc toạ độ).

• *Giả sử phương trình đường thẳng d: y = m.*

PT hoành độ giao điểm của (C) và d: $\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{8}{3} = m \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 9x + 8 - 3m = 0$ *(1)*

Để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho ΔOAB cân tại O thì (1) phải có 2 nghiệm $x_1,\ x_2 = -x_1$ *(* $x_1, -x_1$ *là hoành độ của A, B)* $\Rightarrow$ x_1*,* x_2 *là các nghiệm của phương trình:* $(x^2 - x_1^2)(x - x_2) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x_2x^2 - x_1^2x + x_1^2x_2 = 0$ *(2)*

Đồng nhất (1) và (2) ta được: $\begin{cases} x_2 = 3 \\ x_1^2 = 9 \\ x_1^2x_2 = 8-3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \pm 3 \\ x_2 = 3 \\ m = -\frac{19}{3} \end{cases}$. *Kết luận: d:* $y = -\frac{19}{3}$.

Câu 27. Cho hàm số $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$ (1).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1).

2) Gọi Δ là đường thẳng đi qua $A(-1;0)$ và có hệ số góc k. Tìm k để Δ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt A,B,C sao cho tam giác OBC có trọng tâm $G(2;2)$ (O là gốc toạ độ).

• *PT đường thẳng Δ:* $y = k(x+1)$. *PT hoành độ giao điểm của (C) và Δ:*

$$x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = k(x+1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ (x-3)^2 = k \end{array}\right.$$

Δ cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow (x-3)^2 = k$ *có hai nghiệm phân biệt khác* -1 $\Leftrightarrow \begin{cases} k>0 \\ k \neq 16 \end{cases}$

Khi đó toạ độ các giao điểm là: $A(-1;0)$, $B\left(3+\sqrt{k}; k\left(4+\sqrt{k}\right)\right)$, $C\left(3-\sqrt{k}; k\left(4-\sqrt{k}\right)\right)$.

Do đó tọa độ trọng tâm ΔOBC : $\begin{cases} x_G = 2 \\ y_G = \frac{8k}{3} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow k = \frac{3}{4}$ *(thoả điều kiện).*

Dạng 2: Sự tương giao của đồ thị hàm số trùng phương: $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c \ (a \neq 0)$

A. Kiến thức cơ bản

Số giao điểm của (C): $y = ax^4 + bx^2 + c$ *với trục Ox = số nghiệm của* $ax^4 + bx^2 + c = 0$ *(1)*

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \ (1) \Leftrightarrow \begin{cases} t = x^2, \ t \geq 0 \\ at^2 + bt + c = 0 \ (2) \end{cases}$$

Để xác định số nghiệm của (1) ta dựa vào số nghiệm của (2) và dấu của chúng.

- (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2) \text{ vô nghiệm} \\ (2) \text{ có nghiệm kép âm} \\ (2) \text{ có 2 nghiệm âm} \end{array}\right.$
- (1) có 1 nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2) \text{ có nghiệm kép bằng } 0 \\ (2) \text{ có 1 nghiệm bằng } 0, \text{ nghiệm còn lại âm} \end{array}\right.$
- (1) có 2 nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2) \text{ có nghiệm kép dương} \\ (2) \text{ có 1 nghiệm dương và 1 nghiệm âm} \end{array}\right.$
- (1) có 3 nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) *có 1 nghiệm bằng 0, nghiệm còn lại dương*
- (1) có 4 nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) *có 2 nghiệm dương phân biệt*

B. Một số dạng câu hỏi thường gặp

1. Tìm điều kiện để đồ thị (C) cắt trục hoành tại *k* điểm phân biệt.

Dựa vào các trường hợp nêu trên.

2. Tìm điều kiện để đồ thị (C) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

$\Leftrightarrow$ $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (1) có 4 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow$ $at^2 + bt + c = 0 \ (t = x^2)$ (2) có 2 nghiệm dương phân biệt t_1, t_2 (giả sử $t_1 < t_2$)

– Khi đó các nghiệm của (1) là: $-\sqrt{t_2}; -\sqrt{t_1}; \sqrt{t_1}; \sqrt{t_2}$.

– Vì $-\sqrt{t_2}; -\sqrt{t_1}; \sqrt{t_1}; \sqrt{t_2}$ lập thành cấp số cộng nên $\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = \sqrt{t_1} - \left(-\sqrt{t_1}\right) \Leftrightarrow t_2 = 9t_1$.

– Giải điều kiện: $\begin{cases} t_1 + t_2 = -\dfrac{b}{a} \\ t_1 t_2 = \dfrac{c}{a} \\ t_1 = 9t_2 \end{cases}$.

Câu 28. Cho hàm số $y = x^4 - mx^2 + m - 1$ có đồ thị là (C_m)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 8$.

2) Định *m* để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

• *PT hoành độ giao điểm của (Cm) với trục hoành:* $x^4 - mx^2 + m - 1 = 0$ *(1)*

Đặt $t = x^2, t \geq 0$. *Khi đó: (1)* $\Leftrightarrow t^2 - mt + m - 1 = 0$ *(2)* $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = m - 1 \end{array}\right.$

YCBT $\Leftrightarrow$ *(1) có 4 nghiệm phân biệt* $\Leftrightarrow$ *(2) có 2 nghiệm dương phân biệt* $\Leftrightarrow 0 < m - 1 \neq 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$

Câu 29. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1$ có đồ thị là (C_m).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho khi $m = 0$.

2) Định m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

• *Xét phương trình hoành độ giao điểm:* $x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1 = 0$ *(1)*

Đặt $t = x^2, t \geq 0$ *thì (1) trở thành:* $f(t) = t^2 - 2(m+1)t + 2m + 1 = 0$.

Để (C_m) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt thì $f(t) = 0$ *phải có 2 nghiệm dương phân biệt*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 > 0 \\ S = 2(m+1) > 0 \\ P = 2m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{2} \\ m \neq 0 \end{cases} \ (*)$$

Với (*), gọi $t_1 < t_2$ *là 2 nghiệm của* $f(t) = 0$, *khi đó hoành độ giao điểm của (C_m) với Ox lần lượt là:* $x_1 = -\sqrt{t_2}; x_2 = -\sqrt{t_1}; x_3 = \sqrt{t_1}; x_4 = \sqrt{t_2}$

x_1, x_2, x_3, x_4 *lập thành cấp số cộng* $\Leftrightarrow x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 \Leftrightarrow t_2 = 9t_1$

$$\Leftrightarrow m + 1 + |m| = 9(m + 1 - |m|) \Leftrightarrow 5|m| = 4(m+1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5m = 4m + 4 \\ -5m = 4m + 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = -\dfrac{4}{9} \end{array}\right. \ \textit{(thoả (*))}$$

Vậy $m = \left\{4; -\dfrac{4}{9}\right\}$

<u>Câu hỏi tương tự</u>:

a) Với $y = -x^4 + 2(m+2)x^2 - 2m - 3$ *ĐS:* $m = 3, m = -\dfrac{13}{9}$.

Câu 30. Cho hàm số $y = x^4 - (3m+2)x^2 + 3m$ có đồ thị là (C_m), *m* là tham số.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = 0.

2) Tìm *m* để đường thẳng $y = -1$ cắt đồ thị (C_m) tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

• *Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và đường thẳng* $y = -1$:

$$x^4 - (3m+2)x^2 + 3m = -1 \Leftrightarrow x^4 - (3m+2)x^2 + 3m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \pm 1 & \\ x^2 = 3m + 1 & (*) \end{array}\right.$$

Đường thẳng $y = -1$ *cắt (C_m) tại 4 điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 2 khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác ±1 và nhỏ hơn 2*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 3m + 1 < 4 \\ 3m + 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ -\dfrac{1}{3} < m < 1; m \neq 0 \right.$$

Câu 31. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1$ có đồ thị là (C_m), *m* là tham số.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = 0.

2) Tìm *m* để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn $\sqrt{3}$.

• *Xét phương trình hoành độ giao điểm:* $x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1 = 0$ *(1)*

Đặt $t = x^2, t \ge 0$ *thì (1) trở thành:* $f(t) = t^2 - 2(m+1)t + 2m + 1 = 0$.

(C_m) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn $\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow f(t)$ *có 2 nghiệm phân biệt* t_1, t_2 *sao cho:* $\left[\begin{array}{l} 0 = t_1 < t_2 < 3 \\ 0 < t_1 < 3 \le t_2 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 > 0 \\ f(0) = 2m + 1 = 0 \\ S = 2(m+1) < 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \Delta' = m^2 > 0 \\ f(3) = 4 - 4m \le 0 \\ S = 2(m+1) > 0 \\ P = 2m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2} \vee m \ge 1$$

Vậy: $m = -\frac{1}{2} \vee m \ge 1$.

Câu 32. Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 2m$ (C*m*), với *m* là tham số.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$..

2) Chứng minh đồ thị (C*m*) luôn cắt trục *Ox* tại ít nhất hai điểm phân biệt, với mọi $m < 0$.

• *PT hoành độ giao điểm của (Cm) với trục Ox:* $x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 2m = 0$ *(1)*

Đặt $t = x^2$ $(t \ge 0)$, *(1) trở thành :* $t^2 - 2m^2t + m^4 + 2m = 0$ *(2)*

Ta có : $\Delta' = -2m > 0$ *và* $S = 2m^2 > 0$ *với mọi* $m > 0$. *Nên (2) có nghiệm dương*

$\Rightarrow$ *(1) có ít nhất 2 nghiệm phân biệt* $\Rightarrow$ *đồ thị hàm số (1) luôn cắt trục Ox tại ít nhất hai điểm phân biệt.*

Câu 33. Cho hàm số $y = x^4 + 2m^2x^2 + 1$ (*m* là tham số) (1)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi *m* = 1.

2) Chứng minh rằng đường thẳng $y = x + 1$ luôn cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của *m*.

• *Xét PT hoành độ giao điểm:*

$$x^4 + 2m^2x^2 + 1 = x + 1 \Leftrightarrow x\left(x^3 + 2m^2x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ g(x) = x^3 + 2m^2x - 1 = 0 \quad (*) \end{array}\right.$$

Ta có: $g'(x) = 3x^2 + 2m^2 \ge 0$ *(với mọi x và mọi m)* $\Rightarrow$ *Hàm số g(x) luôn đồng biến với mọi giá trị của m.*

Mặt khác g(0) = –1 ≠ 0. Do đó phương trình (*) có nghiệm duy nhất khác 0.

Vậy đường thẳng $y = x + 1$ *luôn cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của m.*

Câu 34. Cho hàm số $y = x^4 - (m^2 + 2)x^2 + m^2 + 1$ (C*m*).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 2$.

2) Tìm các giá trị của *m* để (C*m*) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt sao cho hình phẳng giới hạn bởi (C*m*) với trục hoành phần phía trên trục hoành có diện tích bằng $\frac{96}{15}$.

• *PT hoành độ giao điểm của (Cm) với trục Ox:* $x^4 - (m^2 + 2)x^2 + m^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{m^2 + 1} \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ (Cm) cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0$ (*).
Khi đó: diện tích hình phẳng giới hạn bởi (Cm) với trục hoành phần phía trên trục hoành là: $S = \int_{-1}^{1} (x^4 - (m^2+2)x^2 + m^2 + 1)dx \Leftrightarrow \frac{20m^2+16}{15} = \frac{96}{15} \Leftrightarrow m = \pm 2$ *(thoả (*)).*

Câu 35. Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + m$ (C*m*).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 2$.
2) Tìm các giá trị của *m* để (C*m*) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt sao cho hình phẳng giới hạn bởi (C*m*) với trục hoành có diện tích phần phía trên trục hoành bằng diện tích phần dưới trục hoành.

• *PT hoành độ giao điểm của (Cm) với trục hoành:* $x^4 - 4x^2 + m = 0$ *(1)*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = x^2, t \geq 0 \\ t^2 - 4t + m = 0 \ (2) \end{cases}$$

(Cm) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 - m > 0 \\ S = 4 > 0 \\ P = m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 4$ *(*).*

Giả sử (2) có nghiệm $t_1, t_2\ (0 < t_1 < t_2)$*. Khi đó (1) có 4 nghiệm phân biệt theo thứ tự tăng dần là:* $x_1 = -\sqrt{t_2}; x_2 = -\sqrt{t_1}; x_3 = \sqrt{t_1}; x_4 = \sqrt{t_2}$ *. Do tính đối xứng của (Cm) nên ta có:*

$$\int_0^{x_3} (x^4 - 4x^2 + m)dx = \int_{x_3}^{x_4} (-x^4 + 4x^2 - m)dx \Leftrightarrow \frac{x_4^5}{5} - \frac{4x_3^4}{3} + mx_4 = 0 \Leftrightarrow 3x_4^4 - 20x_4^2 + 15m = 0$$

Suy ra x_4 *là nghiệm của hệ:* $\begin{cases} x_4^4 - 4x_4^2 + m = 0 & (3) \\ 3x_4^4 - 20x_4^2 + 15m = 0 & (4) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \frac{20}{9} \end{array} \right.$.

Đối chiếu điều kiện (*) ta suy ra $m = \frac{20}{9}$.

Câu 36. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1$ (C*m*).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$.
2) Tìm các giá trị của *m* để (C*m*) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt A, B, C, D có hoành độ lần lượt là x_1, x_2, x_3, x_4 ($x_1 < x_2 < x_3 < x_4$) sao cho tam giác ACK có diện tích $S = 4$, biết $K(3;-2)$.

• *PT hoành độ giao điểm của (Cm) với trục hoành:* $x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1 = 0$ *(1)*.

Đặt $t = x^2, t \geq 0$*. (1) trở thành:* $t^2 - 2(m+1)t + 2m + 1 = 0$ *(2)*

(Cm) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m+1)^2 - (2m+1) > 0 \\ S = 2(m+1) > 0 \\ P = 2m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{2} \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Khi đó (Cm) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt có hoành độ theo thứ tự là: $-\sqrt{t_1}; -\sqrt{t_2}; \sqrt{t_2}; \sqrt{t_1}$ *, với* $t_1 > t_2$.

Ta có: $S_{ACK} = \frac{1}{2} AC.d(K, AC)$ *(3), với* $d(K, AC) = |y_K| = 2$.

Khi đó: (3) $\Leftrightarrow \sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} = 4 \Leftrightarrow t_1 + t_2 + 2\sqrt{t_1 t_2} = 16 \Leftrightarrow 2(m+1) + 2\sqrt{2m+1} = 16 \Leftrightarrow m = 4$.

Dạng 3: Sự tương giao của đồ thị hàm số: $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

Câu 37. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+2}$ có đồ thị là (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Chứng minh rằng đường thẳng *d*: $y = -x + m$ luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Tìm *m* để đoạn AB có độ dài nhỏ nhất.

• *PT hoành độ giao điểm của (C) và d:*

$$\frac{2x+1}{x+2} = -x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ f(x) = x^2 + (4-m)x + 1 - 2m = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Do (1) có $\Delta = m^2 + 12 > 0$ *và* $f(-2) = (-2)^2 + (4-m).(-2) + 1 - 2m = -3 \neq 0, \forall m$

nên đường thẳng d luôn luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B.

Ta có: $y_A = m - x_A; y_B = m - x_B$ *nên* $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = 2(m^2+12)$

Suy ra AB ngắn nhất $\Leftrightarrow$ AB^2 *nhỏ nhất* $\Leftrightarrow$ $m = 0$. *Khi đó:* $AB = \sqrt{24}$.

Câu hỏi tương tự:

a) $y = \dfrac{x-2}{x-1}$ *ĐS:* $m = 2$ b) $y = \dfrac{x-1}{2x}$ *ĐS:* $m = \dfrac{1}{2}$

Câu 38. Cho hàm số $y = \dfrac{x-3}{x+1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Viết phương trình đường thẳng *d* qua điểm $I(-1;1)$ và cắt đồ thị (*C*) tại hai điểm *M*, *N* sao cho *I* là trung điểm của đoạn *MN*.

• *Phương trình đường thẳng* $d: y = k(x+1)+1$

d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt M, N $\Leftrightarrow \dfrac{x-3}{x+1} = kx + k + 1$ *có 2 nghiệm phân biệt khác* -1.

$$\Leftrightarrow f(x) = kx^2 + 2kx + k + 4 = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt khác } -1 \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta = -4k > 0 \\ f(-1) = 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow k < 0$$

Mặt khác: $x_M + x_N = -2 = 2x_I \Leftrightarrow$ *I là trung điểm MN với* $\forall k < 0$.

Kết luận: Phương trình đường thẳng cần tìm là $y = kx + k + 1$ *với* $k < 0$.

Câu 39. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+4}{1-x}$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Gọi (*d*) là đường thẳng qua *A*(1; 1) và có hệ số góc *k*. Tìm *k* để (*d*) cắt (*C*) tại hai điểm *M*, *N* sao cho $MN = 3\sqrt{10}$.

• *Phương trình đường thẳng* $(d): y = k(x-1)+1$.

Bài toán trở thành: Tìm k để hệ phương trình sau có hai nghiệm $(x_1;y_1),(x_2;y_2)$ *phân biệt sao cho* $\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 = 90$ *(a)*

$$\begin{cases} \dfrac{2x+4}{-x+1} = k(x-1)+1 \\ y = k(x-1)+1 \end{cases} \text{(I). Ta có: } (I) \Leftrightarrow \begin{cases} kx^2 - (2k-3)x + k + 3 = 0 \\ y = k(x-1)+1 \end{cases}$$

(I) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow kx^2 - (2k-3)x + k + 3 = 0 \ (b)$ *có 2 nghiệm phân biệt.*

$\Leftrightarrow k \neq 0, k < \frac{3}{8}$.

Ta biến đổi (a) trở thành: $(1+k^2)\left(x_2 - x_1\right)^2 = 90 \Leftrightarrow (1+k^2)\left[\left(x_2 + x_1\right)^2 - 4x_2x_1\right] = 90$ *(c)*

Theo định lí Viet cho (b) ta có: $x_1 + x_2 = \frac{2k-3}{k}, x_1x_2 = \frac{k+3}{k}$, *thế vào (c) ta có phương trình:* $8k^3 + 27k^2 + 8k - 3 = 0 \Leftrightarrow (k+3)(8k^2 + 3k - 1) = 0$

$\Leftrightarrow k = -3;\ k = \frac{-3+\sqrt{41}}{16};\ k = \frac{-3-\sqrt{41}}{16}$.

Kết luận: Vậy có 3 giá trị của k thoả mãn như trên.

Câu 40. Cho hàm số $y = \frac{2x-2}{x+1}$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm *m* để đường thẳng (*d*): $y = 2x + m$ cắt (*C*) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = \sqrt{5}$.

• *PT hoành độ giao điểm:* $\frac{2x-2}{x+1} = 2x + m \Leftrightarrow 2x^2 + mx + m + 2 = 0\ (x \neq -1)$ *(1)*

d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B $\Leftrightarrow$ *(1) có 2 nghiệm phân biệt* x_1, x_2 *khác –1*

$\Leftrightarrow m^2 - 8m - 16 > 0$ *(2)*

Khi đó ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{m}{2} \\ x_1x_2 = \frac{m+2}{2} \end{cases}$. *Gọi* $A\left(x_1; 2x_1 + m\right)$, $B\left(x_2; 2x_2 + m\right)$.

$AB^2 = 5 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + 4(x_1 - x_2)^2 = 5 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1 \Leftrightarrow m^2 - 8m - 20 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 10 \\ m = -2 \end{array}\right.$ *(thoả (2))*

Vậy: $m = 10; m = -2$.

<u>Câu hỏi tương tự</u>:

a) $y = \frac{2x-1}{x+2}, d: y = x + m, AB = 2\sqrt{2}$. *ĐS:* $m = -1; m = 7$.

Câu 41. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+m}$ (1).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.

2) Tìm các giá trị của tham số *m* sao cho đường thẳng (*d*): $y = x + 2$ cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm *A* và *B* sao cho $AB = 2\sqrt{2}$.

• *PT hoành độ giao điểm:* $\frac{x-1}{x+m} = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -m \\ x^2 + (m+1)x + 2m + 1 = 0 \end{cases}$ (*)

d cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm A, B phân biệt $\Leftrightarrow$ *(*) có hai nghiệm phân biệt khác* $-m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x \neq -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m - 3 > 0 \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 - 2\sqrt{3} \vee m > 3 + 2\sqrt{3} \\ m \neq -1 \end{cases}$ *(**)*

Khi đó gọi x_1, x_2 *là các nghiệm của (*), ta có* $\begin{cases} x_1 + x_2 = -(m+1) \\ x_1.x_2 = 2m + 1 \end{cases}$

Các giao điểm của d và đồ thị hàm số (1) là $A(x_1; x_1 + 2), B(x_2; x_2 + 2)$.

Suy ra $AB^2 = 2(x_1 - x_2)^2 = 2\left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2\right] = 2(m^2 - 6m - 3)$

Theo giả thiết ta được $2(m^2-6m-3)=8 \Leftrightarrow m^2-6m-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=7 \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện (**) ta được $m=7$ *là giá trị cần tìm.*

Câu 42. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm các giá trị của tham số *k* sao cho đường thẳng (*d*): $y=kx+2k+1$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt *A* và *B* sao cho các khoảng cách từ A và B đến trục hoành là bằng nhau.

• *PT hoành độ giao điểm:* $\dfrac{2x+1}{x+1}=kx+2k+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ kx^2+(3k-1)x+2k=0 \quad (*) \end{cases}$

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B $\Leftrightarrow$ *(*) có 2 nghiệm phân biệt* $\Leftrightarrow \begin{cases} k\neq 0 \\ \Delta=k^2-6k+1>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k\neq 0 \\ k<3-2\sqrt{2} \ \vee \ k>3+2\sqrt{3} \end{cases}$ *(**). Khi đó:* $A(x_1;kx_1+2k+1), B(x_2;kx_2+2k+1)$.

Ta có: $d(A,Ox)=d(B,Ox) \Leftrightarrow |kx_1+2k+1|=|kx_2+2k+1| \Leftrightarrow k(x_1+x_2)+4k+2=0$

$\Leftrightarrow k=-3$ *(thoả (**).*

Câu 43. Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x-1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm *m* để đường thẳng $d: y=mx-m+2$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho độ dài AB ngắn nhất.

• *PT hoành độ giao điểm:* $\dfrac{2x}{x-1}=mx-m+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ g(x)=mx^2-2mx+m-2=0 \quad (2) \end{cases}$

d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B $\Leftrightarrow$ *(2) có 2 nghiệm phân biệt khác 1* $\Leftrightarrow m>0$

Khi đó: $A(x_1;mx_1-m+2), B(x_2;mx_2-m+2) \Rightarrow AB^2=(1+m)^2(x_2-x_1)^2$

Theo định lí Viet, ta có: $x_1+x_2=2;\ x_1x_2=\dfrac{m-2}{m} \Rightarrow AB^2=8\left(m+\dfrac{1}{m}\right)\geq 16$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m=1$. *Vậy* $\min AB=4$ *khi* $m=1$.

Câu 44. Cho hàm $y=\dfrac{x+2}{2x-2}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm *m* để đường thẳng $d: y=x+m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $OA^2+OB^2=\dfrac{37}{2}$.

• *PT hoành độ giao điểm của (C) và d:* $\dfrac{x+2}{2x-2}=x+m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ g(x)=2x^2+(2m-3)x-2(m+1)=0 \end{cases}$.

Vì $\begin{cases} \Delta_g=4m^2+4m+25>0, \forall m \\ g(1)=3\neq 0 \end{cases}$ *nên d luôn cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B.*

Gọi $A(x_1;x_1+m), B(x_2;x_2+m)$. *Theo định lí Viet, ta có:* $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{2m-3}{2} \\ x_1x_2=-(m+1) \end{cases}$

Ta có: $OA^2 + OB^2 = \dfrac{37}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(4m^2 + 2m + 17) = \dfrac{37}{2} \Leftrightarrow m = -\dfrac{5}{2}; m = 2$.

Câu 45. Cho hàm $y = \dfrac{x}{1-x}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm m để đường thẳng $d: y = mx - m - 1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho $AM^2 + AN^2$ đạt giá trị nhỏ nhất, với $A(-1;1)$.

• *PT hoành độ giao điểm của (C) và d:* $\dfrac{x}{1-x} = mx - m - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ mx^2 - 2mx + m + 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$

d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt ⇔ (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 1 ⇔ $m < 0$.

Gọi I là trung điểm của MN ⇒ $I(1;-1)$ *cố định.*

Ta có: $AM^2 + AN^2 = 2AI^2 + \dfrac{MN^2}{2}$. *Do đó* $AM^2 + AN^2$ *nhỏ nhất ⇔ MN nhỏ nhất*

$MN^2 = (x_2 - x_1)^2(1+m)^2 = -4m - \dfrac{4}{m} \geq 8$. *Dấu "=" xảy ra ⇔* $m = -1$.

Vậy: $\min(AM^2 + AN^2) = 20$ *khi* $m = -1$.

Câu 46. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm m để đường thẳng *d*: $y = x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho ΔOAB vuông tại O.

• *PT hoành độ giao điểm của (C) và d:* $x^2 + (m-3)x + 1 - m = 0, \quad x \neq 1 \qquad (*)$

(*) có $\Delta = m^2 - 2m + 5 > 0, \forall m \in R$ *và (*) không có nghiệm x = 1.*

⇒ (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt là x_A, x_B. *Theo định lí Viét:* $\begin{cases} x_A + x_B = 3 - m \\ x_A . x_B = 1 - m \end{cases}$

Khi đó: $A\left(x_A;\, x_A + m\right), B\left(x_B;\, x_B + m\right)$

ΔOAB vuông tại O thì $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_A x_B + \left(x_A + m\right)\left(x_B + m\right) = 0$

$$\Leftrightarrow 2x_A x_B + m\left(x_A + x_B\right) + m^2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$$

Vậy: m = –2.

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm các giá trị của m sao cho đường thẳng (*d*): $y = x + m$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt M, N sao cho diện tích tam giác IMN bằng 4 (I là tâm đối xứng của (C)).

• *Tâm đối xứng của (C) là I(1; 2). Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C):*

$$\frac{2x+1}{x-1} = x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ f(x) = x^2 + (m-3)x - m - 1 = 0 \end{cases}$$

d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt M, N ⇔ $f(x) = 0$ *có hai nghiệm phân biệt* x_M, x_N *khác 1*

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 2m + 13 > 0 \\ f(1) = -3 \neq 0 \end{cases}$ *(đúng với mọi m). Tọa độ các giao điểm là* $M(x_M; y_M), N(x_N; y_N)$.

$$MN = \sqrt{2\left[(x_M + x_N)^2 - 4x_M x_N\right]} = \sqrt{2(m^2 - 2m + 13)}\;;\; d = d(I,d) = \frac{|m-1|}{\sqrt{2}}$$

$$S_{IMN} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}MN.d = 4 \Leftrightarrow |m-1|.\sqrt{m^2 - 2m + 13} = 8 \;\Leftrightarrow\; m = 3;\, m = -1.$$

Câu 48. Cho hàm số $y = \dfrac{-x+m}{x+2}$ có đồ thị là (C*m*) (*m* là tham số).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$.

2) Tìm các giá trị của *m* để đường thẳng $d: 2x + 2y - 1 = 0$ cắt (C*m*) tại hai điểm A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 1 (O là gốc tọa độ).

• *PT hoành độ giao điểm của d và* (C_m): $\dfrac{-x+m}{x+2} = \dfrac{1}{2} - x \Leftrightarrow x^2 - x + 2m - 2 = 0 \;(1), x \neq -2$

d cắt (Cm) tại 2 điểm A, B $\Leftrightarrow$ *(1) có 2 nghiệm phân biệt khác –2* $\Leftrightarrow -2 \neq m < \dfrac{9}{8}$ *(*)*

Khi đó các giao điểm là: $A\left(x_1; \dfrac{1}{2} - x_1\right), B\left(x_2; \dfrac{1}{2} - x_2\right)$. $AB = \sqrt{2(9-8m)}$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}AB.d(O,d) = \frac{1}{2}\sqrt{2(9-8m)}.\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{9-8m} = 1 \Leftrightarrow m = -\frac{7}{8} \text{ (thảo (*))}.$$

Câu 49. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị là (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm các giá trị *m* để đường thẳng $y = -3x + m$ cắt (C) tại A và B sao cho trọng tâm của tam giác OAB thuộc đường thẳng $d: x - 2y - 2 = 0$ (O là gốc tọa độ).

• *PT hoành độ giao điểm:* $\dfrac{2x+1}{x-1} = -3x + m \;\Leftrightarrow 3x^2 - (1+m)x + m + 1 = 0$ *(1)*, $(x \neq 1)$

d cắt (C) tại A và B $\Leftrightarrow$ *(1) có 2 nghiệm phân biệt khác 1* $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 11 \\ m < -1 \end{array}\right.$ *(*)*

Gọi x_1, x_2 *là các nghiệm của (1). Khi đó* $A(x_1; -3x_1 + m), B(x_2; -3x_2 + m)$

Gọi I là trung điểm của AB $\Rightarrow x_I = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{1+m}{6}, y_I = -3x_I + m = \dfrac{m-1}{2}$

Gọi G là trọng tâm tam giác OAB $\Rightarrow \overrightarrow{OG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{OI} \Rightarrow G\left(\dfrac{1+m}{9}; \dfrac{m-1}{3}\right)$

$$G \in d \Leftrightarrow \frac{1+m}{9} - 2.\left(\frac{m-1}{3}\right) - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{11}{5} \text{ (thoả (*)). Vậy } m = -\frac{11}{5}.$$

Câu 50. Cho hàm số $y = \dfrac{x+3}{x-2}$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm *m* để đường thẳng $d: y = -x + m + 1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $\widehat{AOB}$ nhọn.

• *PT hoành độ giao điểm của (C) và d:* $\dfrac{x+3}{x-2} = -x + m + 1$

$\Leftrightarrow x^2 - (m+2)x + 2m + 5 = 0 \;(x \neq 2)$ *(1)*

(1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m + 16 > 0 \\ 2^2 - 2(m+2) + 2m + 5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m.$

Gọi $A(x_1;-x_1+m+1), B(x_2;-x_2+m+1)$ *là các giao điểm của (C) và d.*

Ta có: $\widehat{AOB}$ *nhọn* $\Leftrightarrow AB^2 < OA^2 + OB^2 \Leftrightarrow 2(x_2-x_1)^2 < (-x_1+m+1)^2 + (-x_2+m+1)^2$

$\Leftrightarrow -2x_1x_2 + (m+1)(x_1+x_2) - (m+1)^2 < 0 \Leftrightarrow m > -3$.

Câu 51. Cho hàm số $y = \dfrac{3x+2}{x+2}$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Đường thẳng $y = x$ cắt (C) tại hai điểm A, B. Tìm m để đường thẳng $d: y = x + m$ cắt (C) tại hai điểm C, D sao cho ABCD là hình bình hành.

• *Hoành độ các điểm A, B là các nghiệm của PT:* $\dfrac{3x+2}{x+2} = x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow A(-1;-1), B(2;2) \Rightarrow AB = 3\sqrt{2} \Rightarrow CD = 3\sqrt{2}$.

PT hoành độ giao điểm của (C) và d: $\dfrac{3x+2}{x+2} = x + m \Leftrightarrow x^2 + (m-1)x + 2m - 2 = 0$ *(*)*

d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 10m + 9 > 0 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \neq m < 1 \\ m > 9 \end{array}\right.$.

Khi đó các giao điểm là $C(c;c+m), D(b;b+m)$ *với a, b là các nghiệm của PT (*)*

$CD = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2(c-d)^2} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow m^2 - 10m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \ \ (loại) \\ m = 10 \end{array}\right.$

Vậy: $m = 10$.

Câu 52. Cho hàm số $y = \dfrac{x+3}{x+2}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm m để đường thẳng $d: y = 2x + 3m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = -4$ với O là gốc toạ độ.

• *PT hoành độ giao điểm của (C) và (d):* $\dfrac{x+3}{x+2} = 2x + 3m$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 3(1+m)x + 6m - 3 = 0 \ \ (1) \ (x \neq 2)$

d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt ⇔ (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 *khác –2*

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9m^2 - 30m + 33 > 0 \\ 8 - 6(1+m) + 6m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m$

Khi đó: $A(x_1;2x_1+3m), B(x_2;2x_2+3m)$. $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = -4 \Leftrightarrow \dfrac{12m-15}{2} = -4 \Leftrightarrow m = \dfrac{7}{12}$.

Câu 53. Cho hàm số: $y = \dfrac{x+2}{x-2}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Chứng minh rằng với mọi giá trị m thì trên (C) luôn có cặp điểm A, B nằm về hai nhánh của (C) và thỏa $\begin{cases} x_A - y_A + m = 0 \\ x_B - y_B + m = 0 \end{cases}$.

• *Ta có:* $\begin{cases} x_A - y_A + m = 0 \\ x_B - y_B + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_A = x_A + m \\ y_B = x_B + m \end{cases} \Rightarrow A, B \in (d): y = x + m$

⇒ A, B là giao điểm của (C) và (d). Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d):

$$x+m=\frac{x+2}{x-2} \Leftrightarrow f(x)=x^2+(m-3)x-(2m+2)=0\ (x\neq 2) \quad (*).$$

(*) có $\Delta=m^2+2m+17>0, \forall m \Rightarrow$ *(d) luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B.*

Và $1.f(2)=-4<0 \Rightarrow x_A<2<x_B$ *hoặc* $x_B<2<x_A$ *(đpcm).*

Câu 54. Cho hàm số $y=\frac{x+2}{x-1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Gọi *d* là đường thẳng đi qua điểm A(1; 0) và có hệ số góc *k*. Tìm *k* để *d* cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N thuộc hai nhánh khác nhau của (C) sao cho $AM=2AN$.

• *PT đường thẳng d:* $y=k(x-1)$. *PT hoành độ giao điểm của (C) và d:*

$$\frac{x+2}{x-1}=k(x-1) \Leftrightarrow kx^2-(2k+1)x-2=0\ (x\neq 1) \quad (1)$$

Đặt $t=x-1 \Leftrightarrow x=t+1$. *Khi đó (1) trở thành* $kt^2-t-3=0$ *(2)*

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N thuộc hai nhánh khác nhau $\Leftrightarrow$ *(1) có 2 nghiệm* x_1, x_2 *thoả* $x_1<1<x_2$ $\Leftrightarrow$ *(2) có 2 nghiệm* t_1, t_2 *thoả* $t_1<0<t_2$ $\Leftrightarrow -3k<0 \Leftrightarrow k>0$ *(*).*

Vì A luôn nằm trong đoạn MN và $AM=2AN$ *nên* $\overrightarrow{AM}=-2\overrightarrow{AN} \Rightarrow x_1+2x_2=3$ *(3)*

Áp dụng định lí Viet cho (1) ta có: $x_1+x_2=\frac{2k+1}{k}$ (4), $x_1x_2=\frac{k-2}{k}$ (5).

Từ (3), (4) $\Rightarrow x_1=\frac{k+2}{k}; x_2=\frac{k-1}{k}$. *Thay vào (5) ta được:* $k=\frac{2}{3}$ *(thoả (*)).*

Câu 55. Cho hàm số $y=\frac{2x-m}{mx+1}$ (*m* là tham số) (1).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m=1$.

2) Chứng minh rằng với mọi $m\neq 0$, đồ thị của hàm số (1) cắt đường thẳng $d: y=2x-2m$ tại hai điểm phân biệt A, B thuộc một đường (H) cố định. Đường thẳng *d* cắt các trục O*x*, O*y* lần lượt tại các điểm M, N. Tìm *m* để $S_{\Delta OAB}=3S_{\Delta OMN}$.

• *PT hoành độ giao điểm của (C) và (d):* $\frac{2x-m}{mx+1}=2x-2m$

$$\Leftrightarrow 2mx^2-2m^2x-m=0\ (2),\ x\neq -\frac{1}{m} \Leftrightarrow f(x)=2x^2-2mx-1=0\ (*),\ x\neq -\frac{1}{m}$$

Xét PT (*) có $\begin{cases}\Delta'=m^2+2>0\\ f\left(-\frac{1}{m}\right)=\frac{2}{m^2}+1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \forall m \Rightarrow$ *d luôn cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B.*

Ta có: $\begin{cases}x_A+x_B=m\\ x_A.x_B=-\frac{1}{2}\\ y_A=2x_A-2m\\ y_B=2x_B-2m\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y_A=\frac{1}{x_A}\\ y_B=\frac{1}{x_B}\end{cases} \Rightarrow$ *A, B nằm trên đường (H):* $y=\frac{1}{x}$ *cố định.*

$h=d(O,d)=\frac{|-2m|}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}|m|$, $AB=\sqrt{5}.\sqrt{m^2+2}$, $M(m;0), N(0;-2m)$

$\Rightarrow S_{OAB}=\frac{1}{2}h.AB=|m|\sqrt{m^2+2}$, $S_{OMN}=\frac{1}{2}OM.ON=m^2$; $S_{OAB}=3S_{OMN} \Leftrightarrow m=\pm\frac{1}{2}$.

KSHS 04: TIẾP TUYẾN

A. Kiến thức cơ bản

• Ý nghĩa hình học của đạo hàm: Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số tại điểm $M_0\left(x_0; f(x_0)\right)$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M_0\left(x_0; f(x_0)\right)$ là:

$$y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0) \qquad \left(y_0 = f(x_0)\right)$$

• Điều kiện cần và đủ để hai đường (C_1): $y = f(x)$ và (C_2): $y = g(x)$ tiếp xúc nhau là hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \quad (*)$$

Nghiệm của hệ (*) là hoành độ của tiếp điểm của hai đường đó.

• Nếu $(C_1): y = px + q$ và (C_2): $y = ax^2 + bx + c$ thì

(C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau ⇔ phương trình $ax^2 + bx + c = px + q$ có nghiệm kép.

B. Một số dạng câu hỏi thường gặp

1. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C): $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$:

• Nếu cho x_0 thì tìm $y_0 = f(x_0)$.

Nếu cho y_0 thì tìm x_0 là nghiệm của phương trình $f(x) = y_0$.

• Tính $y' = f'(x)$. Suy ra $y'(x_0) = f'(x_0)$.

• Phương trình tiếp tuyến Δ là: $y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0)$.

2. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C): $y = f(x)$, biết Δ có hệ số góc *k* cho trước.

<u>**Cách 1**</u>: Tìm toạ độ tiếp điểm.

• Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Tính $f'(x_0)$.

• Δ có hệ số góc $k \Rightarrow f'(x_0) = k$ (1)

• Giải phương trình (1), tìm được x_0 và tính $y_0 = f(x_0)$. Từ đó viết phương trình của Δ.

<u>**Cách 2**</u>**:** Dùng điều kiện tiếp xúc.

• Phương trình đường thẳng Δ có dạng: $y = kx + m$.

• Δ tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = kx + m \\ f'(x) = k \end{cases} \quad (*)$$

• Giải hệ (*), tìm được *m*. Từ đó viết phương trình của Δ.

Chú ý: Hệ số góc *k* của tiếp tuyến Δ có thể được cho gián tiếp như sau:

+ Δ tạo với trục hoành một góc α thì $|k| = \tan a$.

+ Δ song song với đường thẳng *d*: $y = ax + b$ thì $k = a$

+ Δ vuông góc với đường thẳng $d: y = ax + b\ (a \neq 0)$ thì $k = -\dfrac{1}{a}$

+ Δ tạo với đường thẳng $d: y = ax + b$ một góc α thì $\left|\dfrac{k-a}{1+ka}\right| = \tan\alpha$

3. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C): $y = f(x)$, biết Δ đi qua điểm $A(x_A; y_A)$.

<u>**Cách 1:**</u> Tìm toạ độ tiếp điểm.

• Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Khi đó: $y_0 = f(x_0),\ y'(x_0) = f'(x_0)$.

• Phương trình tiếp tuyến Δ tại M: $y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0)$

• Δ đi qua $A(x_A; y_A)$ nên: $y_A - y_0 = f'(x_0).(x_A - x_0)$ (2)

• Giải phương trình (2), tìm được x_0. Từ đó viết phương trình của Δ.

Cách 2: Dùng điều kiện tiếp xúc.

- Phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(x_A; y_A)$ và có hệ số góc k: $y - y_A = k(x - x_A)$
- Δ tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = k(x - x_A) + y_A \\ f'(x) = k \end{cases} \quad (*)$$

- Giải hệ (*), tìm được *x* (suy ra k). Từ đó viết phương trình tiếp tuyến Δ.

4. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C): $y = f(x)$, biết Δ tạo với trục O*x* một góc α.

- Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Tiếp tuyến có hệ số góc $k = f'(x_0)$.
- Δ tạo với trục O*x* một góc α ⇔ $|f'(x_0)| = \tan\alpha$. Giải phương trình tìm được x_0.
- Phương trình tiếp tuyến Δ tại M: $y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0)$

5. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C): $y = f(x)$, biết Δ tạo với đường thẳng *d*: $y = ax + b$ một góc α.

- Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Tiếp tuyến có hệ số góc $k = f'(x_0)$.
- Δ tạo với *d* một góc α ⇔ $\left|\dfrac{k-a}{1+ka}\right| = \tan\alpha$. Giải phương trình tìm được x_0.
- Phương trình tiếp tuyến Δ tại M: $y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0)$

6. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C): $y = f(x)$, biết Δ cắt hai trục toạ độ tại A và B sao cho tam giác OAB vuông cân hoặc có diện tích *S* cho trước.

- Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Tiếp tuyến có hệ số góc $k = f'(x_0)$.
- ΔOAB vuông cân ⇔ Δ tạo với O*x* một góc 45^0 và O ∉ Δ.(a)
- $S_{\Delta OAB} = S \Leftrightarrow OA.OB = 2S$. (b)
- Giải (a) hoặc (b) tìm được x_0. Từ đó viết phương trình tiếp tuyến Δ.

8. Lập phương trình tiếp tuyến chung của hai đồ thị $(C_1): y = f(x), (C_2): y = g(x)$.

a) Gọi Δ: $y = ax + b$ là tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2).

u là hoành độ tiếp điểm của Δ và (C_1), *v* là hoành độ tiếp điểm của Δ và (C_2).

- Δ tiếp xúc với (C_1) và (C_2) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(u) = au + b & (1) \\ f'(u) = a & (2) \\ g(v) = av + b & (3) \\ g'(v) = a & (4) \end{cases}$$

- Từ (2) và (4) ⇒ $f'(u) = g'(v) \Rightarrow u = h(v)$ (5)
- Thế *a* từ (2) vào (1) ⇒ $b = k(u)$ (6)
- Thế (2), (5), (6) vào (3) ⇒ *v* ⇒ *a* ⇒ *u* ⇒ *b*. Từ đó viết phương trình của Δ.

b) Nếu (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ x_0 thì một tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) cũng là tiếp tuyến của (C_1) (và (C_2)) tại điểm đó.

9. Tìm những điểm trên đồ thị (C): $y = f(x)$ sao cho tại đó tiếp tuyến của (C) song song hoặc vuông góc với một đường thẳng d cho trước.

- Gọi $M(x_0; y_0) \in$ (C). Δ là tiếp tuyến của (C) tại M. Tính $f'(x_0)$.
- Vì Δ // d nên $f'(x_0) = k_d$ (1)

hoặc Δ ⊥ d nên $f'(x_0) = -\dfrac{1}{k_d}$ (2)

- Giải phương trình (1) hoặc (2) tìm được x_0. Từ đó tìm được $M(x_0; y_0) \in$ (C).

10. Tìm những điểm trên đường thẳng *d* mà từ đó có thể vẽ được 1, 2, 3, ... tiếp tuyến với đồ thị (C): $y = f(x)$.

Giả sử $d: ax+by+c=0$. $M(x_M; y_M) \in d$.

- Phương trình đường thẳng Δ qua M có hệ số góc *k*: $y = k(x - x_M) + y_M$
- Δ tiếp xúc với (C) khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = k(x - x_M) + y_M & (1) \\ f'(x) = k & (2) \end{cases}$$

- Thế *k* từ (2) vào (1) ta được: $f(x) = (x - x_M).f'(x_M) + y_M$ (3)
- Số tiếp tuyến của (C) vẽ từ M = Số nghiệm *x* của (3)

11. Tìm những điểm mà từ đó có thể vẽ được 2 tiếp tuyến với đồ thị (C): $y = f(x)$ và 2 tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

Gọi $M(x_M; y_M)$.

- Phương trình đường thẳng Δ qua M có hệ số góc *k*: $y = k(x - x_M) + y_M$
- Δ tiếp xúc với (C) khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = k(x - x_M) + y_M & (1) \\ f'(x) = k & (2) \end{cases}$$

- Thế *k* từ (2) vào (1) ta được: $f(x) = (x - x_M).f'(x_M) + y_M$ (3)
- Qua M vẽ được 2 tiếp tuyến với (C) ⇔ (3) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2.
- Hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau ⇔ $f'(x_1).f'(x_2) = -1$

Từ đó tìm được M.

Chú ý: Qua M vẽ được 2 tiếp tuyến với (C) sao cho 2 tiếp điểm nằm về hai phía với trục hoành thì $\begin{cases} (3) \text{ có 2 nghiệm phân biệt} \\ f(x_1).f(x_2) < 0 \end{cases}$

Dạng 1: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Câu 1. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm trên (C) những điểm M sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 8.

• *Giả sử* $M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow y_0 = 2x_0^3 - 3x_0^2 + 1$. *Ta có:* $y' = 3x^2 - 6x$.

PTTT Δ tại M: $y = (6x_0^2 - 6x_0)(x - x_0) + 2x_0^3 - 3x_0^2 + 1$.

Δ đi qua $P(0;8) \Leftrightarrow 8 = -4x_0^3 + 3x_0^2 + 1 \Leftrightarrow x_0 = -1$. *Vậy* $M(-1;-4)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm hai điểm A, B thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau và độ dài đoạn AB = $4\sqrt{2}$.

• *Giả sử* $A(a; a^3 - 3a^2 + 1), B(b; b^3 - 3b^2 + 1)$ *thuộc (C), với* $a \neq b$.

Vì tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau nên:

$$y'(a) = y'(b) \Leftrightarrow 3a^2 - 6a = 3b^2 - 6b \Leftrightarrow a^2 - b^2 - 2(a-b) = 0 \Leftrightarrow (a-b)(a+b-2) = 0$$

$\Leftrightarrow a + b - 2 = 0 \Leftrightarrow b = 2 - a$. *Vì* $a \neq b$ *nên* $a \neq 2 - a \Leftrightarrow a \neq 1$

Ta có: $AB = \sqrt{(b-a)^2 + (b^3 - 3b^2 + 1 - a^3 + 3a^2 - 1)^2} = \sqrt{(b-a)^2 + (b^3 - a^3 - 3(b^2 - a^2))^2}$

$$= \sqrt{(b-a)^2 + \left[(b-a)^3 + 3ab(b-a) - 3(b-a)(b+a)\right]^2}$$

$$= \sqrt{(b-a)^2 + (b-a)^2\left[(b-a)^2 + 3ab - 3.2\right]^2}$$

$$= \sqrt{(b-a)^2 + (b-a)^2\left[(b+a)^2 - ab - 6\right]^2} = \sqrt{(b-a)^2 + (b-a)^2(-2-ab)^2}$$

$$AB^2 = (b-a)^2\left[1 + (-2-ab)^2\right] = (2-2a)^2\left[1 + (a^2 - 2a - 2)^2\right]$$

$$= 4(a-1)^2\left[1 + \left[(a-1)^2 - 3\right]^2\right] = 4(a-1)^2\left[(a-1)^4 - 6(a-1)^2 + 10\right]$$

$$= 4(a-1)^6 - 24(a-1)^4 + 40(a-1)^2$$

Mà $AB = 4\sqrt{2}$ *nên* $4(a-1)^6 - 24(a-1)^4 + 40(a-1)^2 = 32$

$$\Leftrightarrow (a-1)^6 - 6(a-1)^4 + 10(a-1)^2 - 8 = 0 \qquad (*)$$

Đặt $t = (a-1)^2, t > 0$. *Khi đó (*) trở thành:*

$$t^3 - 6t^2 + 10t - 8 = 0 \Leftrightarrow (t-4)(t^2 - 2t + 2) = 0 \Leftrightarrow t = 4 \Rightarrow (a-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3 \Rightarrow b = -1 \\ a = -1 \Rightarrow b = 3 \end{array}\right.$$

Vậy 2 điểm thoả mãn YCBT là: $A(3;1), B(-1;-3)$.

Câu hỏi tương tự:

a) Với $y = x^3 - 3x^2 + 2; AB = 4\sqrt{2}$. *ĐS:* $A(3;2), B(-2;-2)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm tất cả các giá trị *k*, để tồn tại 2 tiếp tuyến với (C) phân biệt và có cùng hệ số góc *k*, đồng thời đường thẳng đi qua các tiếp điểm của hai tiếp tuyến đó cắt các trục O*x*, O*y* tương ứng tại A và B sao cho $OA = 2011.OB$.

• *PTTT của (C) có dạng:* $y = kx + m$. *Hoành độ tiếp điểm* x_0 *là nghiệm của phương trình:*

$$f'(x_0)=k \Leftrightarrow 3x_0^2+12x_0+9-k=0 \quad (1)$$

Để tồn tại 2 tiếp tuyến phân biệt thì phương trình (1) phải có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'=9+3k>0 \Leftrightarrow k>-3$ *(2)*

$\Rightarrow$ *Toạ độ các tiếp điểm* $(x_0;y_0)$ *của 2 tiếp tuyến là nghiệm của hệ:*

$$\begin{cases} y_0=x_0^3+6x_0^2+9x_0+3 \\ 3x_0^2+12x_0+9=k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0=\dfrac{k-6}{3}x_0+\dfrac{2k-9}{3} \\ 3x_0^2+12x_0+9=k \end{cases}.$$

$\Rightarrow$ *Phương trình đường thẳng d đi qua các tếp điểm là:* $y=\dfrac{k-6}{3}x+\dfrac{2k-9}{3}$

Do d cắt các trục Ox, Oy tương ứng tại A và B sao cho: $OA=2011.OB$ *nên có thể xảy ra:*

+ *Nếu* $A\equiv O$ *thì* $B\equiv O$. *Khi đó d đi qua O* $\Rightarrow k=\dfrac{9}{2}$.

+ *Nếu* $A\neq O$ *thì ΔOAB vuông tại O. Ta có:* $\tan\widehat{OAB}=\dfrac{OB}{OA}=2011 \Rightarrow \dfrac{k-6}{3}=\pm 2011$

$\Rightarrow k=6039$ *(thoả (2)) hoặc* $k=-6027$ *(không thoả (2)).*

Vậy: $k=\dfrac{9}{2}; k=6039$.

Câu 4. Cho hàm số $y=x^3+(1-2m)x^2+(2-m)x+m+2$ (1) (m là tham số).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1) với m = 2.

2) Tìm tham số m để đồ thị của hàm số (1) có tiếp tuyến tạo với đường thẳng d: $x+y+7=0$ góc α, biết $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{26}}$.

• *Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến* $\Rightarrow$ *tiếp tuyến có VTPT* $\vec{n}_1=(k;-1)$

Đường thẳng d có VTPT $\vec{n}_2=(1;1)$.

Ta có $\cos\alpha=\dfrac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{26}}=\dfrac{|k-1|}{\sqrt{2}\sqrt{k^2+1}} \Leftrightarrow 12k^2-26k+12=0 \Leftrightarrow k=\dfrac{3}{2} \vee k=\dfrac{2}{3}$

YCBT thoả mãn $\Leftrightarrow$ *ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm:*

$$\left[\begin{array}{l} y'=\dfrac{3}{2} \\ y'=\dfrac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2+2(1-2m)x+2-m=\dfrac{3}{2} \\ 3x^2+2(1-2m)x+2-m=\dfrac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta'_1\geq 0 \\ \Delta'_2\geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8m^2-2m-1\geq 0 \\ 4m^2-m-3\geq 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\leq -\dfrac{1}{4}; m\geq \dfrac{1}{2} \\ m\leq -\dfrac{3}{4}; m\geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow m\leq -\dfrac{1}{4} \text{ hoặc } m\geq \dfrac{1}{2}$$

<u>Câu hỏi tương tự</u>:

a) Với $y=x^3-3mx+2;\ d: x+y+7=0;\ \cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{26}}$. *ĐS:* $m\geq -\dfrac{2}{9}$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{1}{3}mx^3+(m-1)x^2+(4-3m)x+1$ có đồ thị là (C_m).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi m = 1.

2) Tìm các giá trị m sao cho trên đồ thị (C_m) tồn tại một điểm duy nhất có hoành độ âm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng (d): $x+2y-3=0$.

• *(d) có hệ số góc* $-\dfrac{1}{2} \Rightarrow$ *tiếp tuyến có hệ số góc* $k=2$. *Gọi x là hoành độ tiếp điểm thì:*

$f'(x)=2 \Leftrightarrow mx^2+2(m-1)x+(4-3m)=2 \Leftrightarrow mx^2+2(m-1)x+2-3m=0$ *(1)*

YCBT $\Leftrightarrow$ *(1) có đúng một nghiệm âm.*

+ Nếu $m=0$ *thì (1)* $\Leftrightarrow -2x=-2 \Leftrightarrow x=1$ *(loại)*

+ Nếu $m \neq 0$ *thì dễ thấy phương trình (1) có 2 nghiệm là* $x=1$ *hay* $x=\dfrac{2-3m}{m}$

Do đó để (1) có một nghiệm âm thì $\dfrac{2-3m}{m}<0 \Leftrightarrow m<0$ *hoặc* $m>\dfrac{2}{3}$

Vậy $m<0$ *hay* $m>\dfrac{2}{3}$.

Câu 6. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}mx^3+(m-1)x^2+(4m-3)x+1$ (C*m*).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m=1$.

2) Tìm các giá trị *m* sao cho trên (C*m*) tồn tại đúng hai điểm có hoành độ dương mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $d: x+2y-3=0$.

• *Ta có:* $y'=mx^2+2(m-1)x+4-3m$; $d: y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

YCBT $\Leftrightarrow$ *phương trình* $y'=2$ *có đúng 2 nghiệm dương phân biệt*

$\Leftrightarrow mx^2+2(m-1)x+2-3m=0$ *có đúng 2 nghiệm dương phân biệt*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta'>0 \\ S>0 \\ P>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<m<\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}<m<\frac{2}{3} \end{array}\right. . \qquad \text{Vậy } m\in\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right).$$

Câu 7. Cho hàm số $y=x^3-mx+m-1$ (C*m*).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m=3$.

2) Tìm *m* để tiếp tuyến của đồ thị (C*m*) tại điểm M có hoành độ $x=-1$ cắt đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ theo một dây cung có độ dài nhỏ nhất.

• *Ta có:* $y'=3x^2-m \Rightarrow y'(-1)=3-m$; $y(-1)=2m-2$. *(C) có tâm* $I(2;3)$, *R = 2.*

PTTT d tại $M(-1;2m-2)$: $y=(3-m)x+m+1 \Leftrightarrow (3-m)x-y+m+1=0$

$$d(I,d)=\frac{|4-m|}{\sqrt{(3-m)^2+1}}=\frac{|1+(3-m)|}{\sqrt{(3-m)^2+1}}\le\frac{\sqrt{2}.\sqrt{(3-m)^2+1}}{\sqrt{(3-m)^2+1}}=\sqrt{2}<R$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m=2$. *Dó đó* $d(I,d)$ *đạt lớn nhất* $\Leftrightarrow m=2$

Tiếp tuyến d cắt (C) tại 2 điểm A, B sao cho AB ngắn nhất $\Leftrightarrow d(I,d)$ *đạt lớn nhất* $\Leftrightarrow m=2$

Khi đó: PTTT d: $y=x+3$.

Câu hỏi tương tự:

a) $y=x^3-mx+m-1$; $x_M=1$; $(C):(x-2)^2+(y-3)^2=\frac{1}{5}$. *ĐS:* $m=1$; $m=\frac{5}{2}$.

Câu 8. Cho hàm số $y=3x-x^3$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm trên đường thẳng (d): $y=-x$ các điểm M mà từ đó kẻ được đúng 2 tiếp tuyến phân biệt với đồ thị (C).

• *Gọi* $M(m;-m)\in d$. *PT đường thẳng Δ qua M có dạng:* $y=k(x-m)-m$.

Δ là tiếp tuyến của (C) ⇔ hệ PT sau có nghiệm: $\begin{cases} 3x - x^3 = k(x-m) - m & (1) \\ 3 - 3x^2 = k & (2) \end{cases}$ *(*)*

Thay (2) vào (1) ta được: $2x^3 - 3mx^2 + 4m = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{2x^3}{3x^2 - 4}$ *(**)*

Từ M kẻ được đúng 2 tiếp tuyến với (C) ⇔ (**) có 2 nghiệm phân biệt

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{2x^3}{3x^2 - 4}$. *Tập xác định* $D = R \setminus \left\{ -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}; \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \right\}$

$f'(x) = \dfrac{6x^4 - 24x^2}{(3x^2 - 4)^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{array} \right.$

Dựa vào BBT, (**) có 2 nghiệm phân biệt ⇔ $\left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = 2 \end{array} \right.$. *Vậy:* $M(-2;2)$ *hoặc* $M(2;-2)$.

Câu 9. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm trên đường thẳng $d: y = 4$ các điểm mà từ đó kẻ được đúng 2 tiếp tuyến với (C).

• *Gọi* $M(m;4) \in d$. *PT đường thẳng Δ qua M có dạng:* $y = k(x-m) + 4$

Δ là tiếp tuyến của (C) ⇔ hệ PT sau có nghiệm: $\begin{cases} x^3 - 3x + 2 = k(x-m) + 4 & (1) \\ 3x^2 - 3 = k & (2) \end{cases}$ *(*)*

Thay (2) vào (1) ta được: $(x+1)\left[2x^2 - (3m+2)x + 3m + 2\right] = 0$ (3)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -1 & \\ 2x^2 - (3m+2)x + 3m + 2 = 0 & (4) \end{array} \right.$

YCBT ⇔ (3) có đúng 2 nghiệm phân biệt

+ TH1: (4) có 2 nghiệm phân biệt, trong đó có 1 nghiệm bằng –1 ⇔ $m = -1$

+ TH2: (4) có nghiệm kép khác –1 ⇔ $m = -\dfrac{2}{3} \vee m = 2$

Vậy các điểm cần tìm là: $(-1;4)$; $\left(-\dfrac{2}{3};4\right)$; $(2;4)$.

Câu 10. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (m-1)x + 2m$ (C*m*).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 1$.
2) Tìm *m* để từ điểm $M(1;2)$ kẻ được đúng 2 tiếp tuyến với (C*m*).

• *PT đường thẳng Δ qua M có dạng:* $y = k(x-1) + 2$. *Δ là tiếp tuyến của (Cm) ⇔ hệ PT sau có nghiệm:* $\begin{cases} x^3 - 2x^2 + (m-1)x + 2m = k(x-1) + 2 \\ 3x^2 - 4x + m - 1 = k \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 3(m-1) = 0$ *(*)*

Để qua M kẻ được đúng hai tiếp tuyến đến (Cm) thì (*) có đúng 2 nghiệm phân biệt

Ta có $f'(x) = 6x^2 - 10x + 4 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1;\ x = \dfrac{2}{3}$

⇒ *Các điểm cực trị của (Cm) là:* $A(1;4-3m)$, $B\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{109}{27} - 3m\right)$.

Do đó (*) có đúng 2 nghiệm phân biệt ⇔ $\left[\begin{array}{l} A \in Ox \\ B \in Ox \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{4}{3} \\ m = \dfrac{109}{81} \end{array} \right.$.

Câu 11. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-2$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm trên đường thẳng (d): y = 2 các điểm mà từ đó kẻ được 3 tiếp tuyến phân biệt với đồ thị (C).

- *Gọi* $M(m;2)\in(d)$. *PT đường thẳng Δ đi qua điểm M có dạng :* $y=k(x-m)+2$

Δ là tiếp tuyến của (C) ⇔ hệ PT sau có nghiệm $\begin{cases}-x^3+3x^2-2=k(x-m)+2 & (1)\\ -3x^2+6x=k & (2)\end{cases}$ *(*).*

Thay (2) và (1) ta được: $2x^3-3(m+1)x^2+6mx-4=0 \Leftrightarrow (x-2)\left[2x^2-(3m-1)x+2\right]=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ f(x)=2x^2-(3m-1)x+2=0 \quad (3)\end{array}\right.$$

Từ M kẻ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị (C)⇔ hệ (*) có 3 nghiệm x phân biệt

$\Leftrightarrow$ *(3) có hai nghiệm phân biệt khác 2* $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ f(2)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<-1 \ \vee \ m>\dfrac{5}{3}\\ m\neq 2\end{cases}$.

Vậy từ các điểm M(m; 2) ∈ (d) với $\begin{cases}m<-1 \ \vee \ m>\dfrac{5}{3}\\ m\neq 2\end{cases}$ *có thể kẻ được 3 tiếp tuyến với (C).*

<u>*Câu hỏi tương tự:*</u>

a) $y=-x^3+3x^2-2,\ d\equiv Ox$. *ĐS:* $M(m;0)$ *với* $\left[\begin{array}{l}m>2\\ -1\neq m<-\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$

Dạng 2: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^2$.
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Trên (C) lấy hai điểm phân biệt A và B có hoành độ lần lượt là *a* và *b*. Tìm điều kiện đối với *a* và *b* để hai tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau.

• *Ta có:* $f'(x) = 4x^3 - 4x$

Hệ số góc tiếp tuyến của (C) tại A và B là $k_A = f'(a) = 4a^3 - 4a, k_B = f'(b) = 4b^3 - 4b$

Tiếp tuyến tại A, B lần lượt có phương trình là:

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) \Leftrightarrow y = f'(a)x + f(a) - af'(a)$$

$$y = f'(b)(x-b) + f(b) \Leftrightarrow y = f'(b)x + f(b) - bf'(b)$$

Hai tiếp tuyến của (C) tại A và B song song hoặc trùng nhau khi và chỉ khi:

$$k_A = k_B \Leftrightarrow 4a^3 - 4a = 4b^3 - 4b \Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2 - 1) = 0 \qquad (1)$$

Vì A và B phân biệt nên $a \neq b$*, do đó (1)* $\Leftrightarrow a^2 + ab + b^2 - 1 = 0$ *(2)*

Mặt khác hai tiếp tuyến của (C) tại A và B trùng nhau khi và chỉ khi:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + ab + b^2 - 1 = 0 \\ f(a) - af'(a) = f(b) - bf'(b) \end{cases} (a \neq b) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + ab + b^2 - 1 = 0 \\ -3a^4 + 2a^2 = -3b^4 + 2b^2 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được nghiệm là $(a;b) = (-1;1)$ *hoặc* $(a;b) = (1;-1)$*, hai nghiệm này tương ứng với cùng một cặp điểm trên đồ thị là* $(-1;-1)$ *và* $(1;-1)$

Vậy điều kiện cần và đủ để hai tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau là:

$$\begin{cases} a^2 + ab + b^2 - 1 = 0 \\ a \neq \pm 1;\ a \neq b \end{cases}$$

Câu 13. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$ (1), *m* là tham số.
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 1$.
2) Gọi A là một điểm thuộc đồ thị hàm số (1) có hoành độ bằng 1. Tìm *m* để khoảng cách từ điểm $B\left(\frac{3}{4}; 1\right)$ đến tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) tại A là lớn nhất .

• $A \in (Cm)$ *nên* $A(1;1-m)$. $y' = 4x^3 - 4mx \Rightarrow y'(1) = 4 - 4m$

Phương trình tiếp tuyến của (Cm) tại A: $y - (1-m) = y'(1).(x-1) \Leftrightarrow (4-4m)x - y - 3(1-m) = 0$

Khi đó $d(B;\Delta) = \dfrac{|-1|}{\sqrt{16(1-m)^2 + 1}} \leq 1$*, Dấu '=' xảy ra* $\Leftrightarrow$ *khi m = 1.*

Do đó $d(B;\Delta)$ *lớn nhất bằng 1 khi và chỉ khi m = 1.*

Câu 14. Cho hàm số $y = (|x|+1)^2.(|x|-1)^2$
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Cho điểm $A(a;0)$. Tìm *a* để từ A kẻ được 3 tiếp tuyến phân biệt với đồ thị (C).

• *Ta có* $y = x^4 - 2x^2 + 1$. *PT đường thẳng d đi qua* $A(a;0)$ *và có hệ số góc k :* $y = k(x-a)$

d là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow$ *hệ phương trình sau có nghiệm:* $\begin{cases} x^4 - 2x^2 + 1 = k(x-a) \\ 4x^3 - 4x = k \end{cases} (I)$

Ta có: $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} (A)$ *hoặc* $\begin{cases} 4x(x^2-1) = k \\ f(x) = 3x^2 - 4ax + 1 = 0 \quad (1) \end{cases} (B)$

+ Từ hệ (A), chỉ cho ta một tiếp tuyến duy nhất là $d_1 : y = 0$.

+ Vậy để từ A kẻ được 3 tiếp tuyến phân biệt với (C) thì điều kiện cần và đủ là hệ (B) phải có 2 nghiệm phân biệt $(x;k)$ *với* $x \neq \pm 1$, *tức là phương trình (1) phải có 2 nghiệm phân biệt khác* ± 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4a^2 - 3 > 0 \\ f(\pm 1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \neq a < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ *hoặc* $1 \neq a > \frac{\sqrt{3}}{2}$

Dạng 3: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số nhất biến $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

Câu 15. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$ có đồ thị là (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại những điểm thuộc đồ thị có khoảng cách đến đường thẳng $d: 3x+4y-2=0$ bằng 2.

• *Giả sử* $M(x_0;y_0)\in(C) \Rightarrow y_0=\dfrac{2x_0+3}{x_0+1}$.

Ta có: $d(M,d)=2 \Leftrightarrow \dfrac{|3x_0+4y_0-2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2 \Leftrightarrow 3x_0+4y_0-12=0$ *hoặc* $3x_0+4y_0+8=0$

• *Với* $3x_0+4y_0-12=0 \Leftrightarrow 3x_0+4\left(\dfrac{2x_0+3}{x_0+1}\right)-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \Rightarrow M_1(0;3) \\ x_0=\dfrac{1}{3} \Rightarrow M_2\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{11}{4}\right)\end{array}\right.$

• *Với* $3x_0+4y_0+8=0 \Leftrightarrow 3x_0+4\left(\dfrac{2x_0+3}{x_0+1}\right)+8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-5 \Rightarrow M_3\left(-5;\dfrac{7}{4}\right) \\ x_0=-\dfrac{4}{3} \Rightarrow M_4\left(-\dfrac{4}{3};-1\right)\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ *PTTT tại* $M_1(0;3)$ *là* $y=-x+3$; *PTTT tại* $M_2\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{11}{4}\right)$ *là* $y=-\dfrac{9}{16}x+\dfrac{47}{16}$;

PTTT tại $M_3\left(-5;\dfrac{7}{4}\right)$ *là* $y=-\dfrac{1}{16}x+\dfrac{23}{16}$; *PTTT tại* $M_4\left(-\dfrac{4}{3};-1\right)$ *là* $y=-9x-13$.

Câu 16. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết khoảng cách từ điểm I(1; 2) đến tiếp tuyến bằng $\sqrt{2}$.

• *Tiếp tuyến của (C) tại điểm* $M(x_0;f(x_0))\in(C)$ *có phương trình:*

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) \Leftrightarrow x+(x_0-1)^2y-2x_0^{\ 2}+2x_0-1=0 \quad (*)$$

Khoảng cách từ điểm I(1; 2) đến tiếp tuyến (*) bằng $\sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{|2-2x_0|}{\sqrt{1+(x_0-1)^4}}=\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=2\end{array}\right.$

Các tiếp tuyến cần tìm : $x+y-1=0$ *và* $x+y-5=0$

Câu 17. Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x+2}$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết rằng khoảng cách từ tâm đối xứng của đồ thị (C) đến tiếp tuyến là lớn nhất.

• *Tiếp tuyến (d) của đồ thị (C) tại điểm M có hoành độ* $a\neq -2$ *thuộc (C) có phương trình:*

$$y=\frac{4}{(a+2)^2}(x-a)+\frac{2a}{a+2} \Leftrightarrow 4x-(a+2)^2y+2a^2=0$$

Tâm đối xứng của (C) là $I(-2;2)$. *Ta có:*

$$d(I,d)=\frac{8|a+2|}{\sqrt{16+(a+2)^4}} \le \frac{8|a+2|}{\sqrt{2.4.(a+2)^2}}=\frac{8|a+2|}{2\sqrt{2}|a+2|}=2\sqrt{2}$$

$d(I,d)$ lớn nhất khi $(a+2)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=-4 \end{array}\right.$.

Từ đó suy ra có hai tiếp tuyến $y = x$ *và* $y = x + 8$.

<u>Câu hỏi tương tự</u>:

a) Với $y = \dfrac{x}{x-1}$. *ĐS:* $y = -x;\ y = -x + 4$.

Câu 18. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết rằng tiếp tuyến cách đều hai điểm $A(2;\ 4)$, $B(-4;\ -2)$.

• *Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm* ($x_0 \neq -1$).

PTTT (d) là $y = \dfrac{1}{(x_0+1)^2}(x - x_0) + \dfrac{2x_0+1}{x_0+1} \Leftrightarrow x - (x_0+1)^2 y + 2x_0^2 + 2x_0 + 1 = 0$

Ta có: $d(A,d) = d(B,d) \Leftrightarrow \left|2 - 4(x_0+1)^2 + 2x_0^2 + 2x_0 + 1\right| = \left|-4 + 2(x_0+1)^2 + 2x_0^2 + 2x_0 + 1\right|$

$\Leftrightarrow x_0 = 1 \vee x_0 = 0 \vee x_0 = -2$

Vậy có ba phương trình tiếp tuyến: $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4};\ y = x + 1;\ y = x + 5$

Câu 19. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Gọi I là giao điểm hai tiệm cận của (C). Tìm điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng MI.

• *Giao điểm của hai tiệm cận là I(1; 2). Gọi M(a; b) ∈ (C)* $\Rightarrow b = \dfrac{2a-1}{a-1}$ *($a \neq 1$)*

PTTT của (C) tại M: $y = -\dfrac{1}{(a-1)^2}(x-a) + \dfrac{2a-1}{a-1}$

PT đường thẳng MI: $y = \dfrac{1}{(a-1)^2}(x-1) + 2$

Tiếp tuyến tại M vuông góc với MI nên ta có: $-\dfrac{1}{(a-1)^2}.\dfrac{1}{(a-1)^2} = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0\ (b=1) \\ a = 2\ (b=3) \end{array}\right.$

Vậy có 2 điểm cần tìm $M_1(0;\ 1)$, $M_2(2;\ 3)$

Câu 20. Cho hàm số $y = \dfrac{(2m-1)x - m^2}{x-1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = -1$.

2) Tìm m để đồ thị của hàm số tiếp xúc với đường thẳng $y = x$.

• *TXĐ: D = R \ {1}.*

Để đồ thị tiếp xúc với đường thẳng $y = x$ *thì:* $\begin{cases} \dfrac{(2m-1)x - m^2}{x-1} = x & (*) \\ \dfrac{(m-1)^2}{(x-1)^2} = 1 & (**) \end{cases}$

Từ (**) ta có $(m-1)^2 = (x-1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = 2 - m \end{array}\right.$

• *Với x = m, thay vào (*) ta được:* $0m = 0$ *(thoả với mọi m). Vì x ≠ 1 nên m ≠ 1.*

• *Với x = 2 – m, thay vào (*) ta được:* $(2m-1)(2-m)-m^2=(2-m)(2-m-1)$

$\Leftrightarrow 4(m-1)^2=0 \Leftrightarrow m=1 \Rightarrow x=1$ *(loại)*

Vậy với m ≠ 1 thì đồ thị hàm số tiếp xúc với đường thẳng $y=x$.

Câu 21. Cho hàm số: $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Cho điểm $A(0;a)$. Tìm *a* để từ A kẻ được 2 tiếp tuyến tới đồ thị (C) sao cho 2 tiếp điểm tương ứng nằm về 2 phía của trục hoành.

• *Phương trình đường thẳng d đi qua* $A(0;a)$ *và có hệ số góc k:* $y=kx+a$

d là tiếp tuyến của (C) ⇔ *Hệ PT* $\begin{cases}\dfrac{x+2}{x-1}=kx+a\\ k=\dfrac{-3}{(x-1)^2}\end{cases}$ *có nghiệm*

⇔ *PT:* $(1-a)x^2+2(a+2)x-(a+2)=0$ *(1) có nghiệm* $x\neq 1$.

Để qua A có 2 tiếp tuyến thì (1) phải có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a\neq 1\\ \Delta'=3a+6>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a\neq 1\\ a>-2\end{cases} \qquad (*)$$

Khi đó ta có: $x_1+x_2=\dfrac{2(a+2)}{a-1}; x_1x_2=\dfrac{a+2}{a-1}$ *và* $y_1=1+\dfrac{3}{x_1-1}; y_2=1+\dfrac{3}{x_2-1}$

Để 2 tiếp điểm nằm về 2 phía đối với trục hoành thì $y_1.y_2<0$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{3}{x_1-1}\right).\left(1+\frac{3}{x_2-1}\right)<0 \Leftrightarrow \frac{x_1.x_2+2(x_1+x_2)+4}{x_1.x_2-(x_1+x_2)+1}<0 \Leftrightarrow 3a+2>0 \Leftrightarrow a>-\frac{2}{3}$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta được: $\begin{cases}a>-\dfrac{2}{3}\\ a\neq 1\end{cases}$.

Câu 22. Cho hàm số y = $\dfrac{x+2}{x+1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Gọi I là giao điểm của 2 đường tiệm cận, Δ là một tiếp tuyến bất kỳ của đồ thị (C). *d* là khoảng cách từ I đến Δ. Tìm giá trị lớn nhất của *d*.

• $y'=\dfrac{-1}{(x+1)^2}$. *Giao điểm của hai đường tiệm cận là I(–1; 1). Giả sử* $M\left(x_0;\dfrac{x_0+2}{x_0+1}\right)\in(C)$

Phương trình tiếp tuyến Δ *với đồ thi hàm số tại M là:*

$$y=\frac{-1}{\left(x_0+1\right)^2}(x-x_0)+\frac{x_0+2}{x_0+1} \Leftrightarrow x+\left(x_0+1\right)^2y-x_0-\left(x_0+1\right)\left(x_0+2\right)=0$$

Khoảng cách từ I đến Δ *là* $d=\dfrac{2\left|x_0+1\right|}{\sqrt{1+\left(x_0+1\right)^4}}=\dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{1}{\left(x_0+1\right)^2}+\left(x_0+1\right)^2}}\leq\sqrt{2}$

Vậy GTLN của d bằng $\sqrt{2}$ *khi* $x_0=0$ *hoặc* $x_0=-2$.

Câu 23. Cho hàm số $y=\frac{-x+1}{2x-1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Chứng minh rằng với mọi *m*, đường thẳng $d: y=x+m$ luôn cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B. Gọi k_1,k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B. Tìm *m* để tổng k_1+k_2 đạt giá trị lớn nhất.

• *PT hoành độ giao điểm của d và (C):* $\frac{-x+1}{2x-1}=x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq \frac{1}{2} \\ g(x)=2x^2+2mx-m-1=0 \ (*) \end{cases}$

Vì $\begin{cases} \Delta'_g=m^2+2m+2>0, \forall m \\ g\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0 \end{cases}$ *nên (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt* x_1,x_2.

Theo định lí Viet ta có: $x_1+x_2=-m; x_1x_2=\frac{-m-1}{2}$. *Giả sử:* $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$.

Tiếp tuyến tại A và B có hệ số góc là: $k_1=-\frac{1}{(2x_1-1)^2}; k_2=-\frac{1}{(2x_2-1)^2}$

$\Rightarrow k_1+k_2=-4(m+1)^2-2\le -2$. *Dấu "=" xảy ra* $\Leftrightarrow m=-1$.

Vậy: k_1+k_2 *đạt GTLN bằng* -2 *khi* $m=-1$.

Câu 24. Cho hàm số $y=\frac{x+2}{2x+3}$ (1).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).

2) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O.

• *Gọi* $(x_0;y_0)$ *là toạ độ của tiếp điểm* $\Rightarrow y'(x_0)=\frac{-1}{(2x_0+3)^2}<0$

ΔOAB cân tại O nên tiếp tuyến Δ song song với đường thẳng $y=-x$ *(vì tiếp tuyến có hệ số góc âm). Nghĩa là:* $y'(x_0)=\frac{-1}{(2x_0+3)^2}=-1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1\Rightarrow y_0=1 \\ x_0=-2\Rightarrow y_0=0 \end{array}\right.$

+ *Với* $x_0=-1; y_0=1 \Rightarrow \Delta: y-1=-(x+1)\Leftrightarrow y=-x$ *(loại)*

+ *Với* $x_0=-2; y_0=0 \Rightarrow \Delta: y-0=-(x+2)\Leftrightarrow y=-x-2$ *(nhận)*

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=-x-2$.

Câu 25. Cho hàm số y = $\frac{2x-1}{x-1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến này cắt các trục O*x*, O*y* lần lượt tại các điểm A và B thoả mãn OA = 4OB.

• *Giả sử tiếp tuyến d của (C) tại* $M(x_0;y_0)\in(C)$ *cắt Ox tại A, Oy tại B sao cho* $OA=4OB$.

Do ΔOAB vuông tại O nên $\tan A=\frac{OB}{OA}=\frac{1}{4} \Rightarrow$ *Hệ số góc của d bằng* $\frac{1}{4}$ *hoặc* $-\frac{1}{4}$.

Hệ số góc của d là $y'(x_0)=-\frac{1}{(x_0-1)^2}<0 \Rightarrow -\frac{1}{(x_0-1)^2}=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1 \ (y_0=\frac{3}{2}) \\ x_0=3 \quad (y_0=\frac{5}{2}) \end{array}\right.$

Khi đó có 2 tiếp tuyến thoả mãn là: $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{4}(x+1)+\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{4}(x-3)+\frac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4} \\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{4} \end{array}\right.$.

Câu 26. Cho hàm số $y=\frac{2x}{x-2}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến này cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho $AB=OA\sqrt{2}$.

• *Gọi* $M(x_0;y_0)\in(C), x_0\neq 2$. *PTTT tại M:* $y=\frac{-4}{(x_0-2)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0}{x_0-2}$

Tam giác vuông OAB có $AB=OA\sqrt{2}$ *nên ΔOAB vuông cân tại O. Do đó d vuông góc với một trong hai đường phân giác* $d_1: y=x; d_2: y=-x$ *và không đi qua O.*

+ Nếu $d\perp d_1$ *thì* $\frac{-4}{(x_0-2)^2}=-1\Leftrightarrow x_0=4 \Rightarrow d: y=-x+8$.

+ Nếu $d\perp d_2$ *thì* $\frac{-4}{(x_0-2)^2}=1 \Rightarrow$ *vô nghiệm.*

Vậy PTTT cần tìm là: $y=-x+8$.

Câu 27. Cho hàm số $y=\frac{x+1}{2x-1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của *m* sao cho tồn tại ít nhất một điểm M ∈ (C) mà tiếp tuyến của (C) tại M tạo với hai trục toạ độ một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng $d: y=2m-1$.

• *Gọi* $M(x_0;y_0)\in(C)$. *PTTT tại M:* $y=\frac{-3}{(2x_0-1)^2}(x-x_0)+y_0$

Gọi A, B là giao điểm của tiếp tuyến với trục hoành và trục tung $\Rightarrow y_B=\frac{2x_0^2+4x_0-1}{(2x_0-1)^2}$.

Từ đó trọng tâm G của ΔOAB có: $y_G=\frac{2x_0^2+4x_0-1}{3(2x_0-1)^2}$. *Vì G ∈ d nên* $\frac{2x_0^2+4x_0-1}{3(2x_0-1)^2}=2m-1$

Mặt khác: $\frac{2x_0^2+4x_0-1}{(2x_0-1)^2}=\frac{6x_0^2-(2x_0-1)^2}{(2x_0-1)^2}=\frac{6x_0^2}{(2x_0-1)^2}-1\geq -1$

Do đó để tồn tại ít nhất một điểm M thoả YCBT thì $2m-1\geq -\frac{1}{3}\Leftrightarrow m\geq\frac{1}{3}$.

Vậy GTNN của m là $\frac{1}{3}$.

Câu 28. Cho hàm số $y=\frac{2x-3}{x-2}$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm M thuộc (C) biết tiếp tuyến đó cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A, B sao cho côsin góc $\widehat{ABI}$ bằng $\frac{4}{\sqrt{17}}$, với I là giao 2 tiệm cận.

• *I(2; 2). Gọi* $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-3}{x_0-2}\right)\in(C),\ x_0\neq 2$

Phương trình tiếp tuyến Δ tại M: $y=-\dfrac{1}{(x_0-2)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0-3}{x_0-2}$

Giao điểm của Δ với các tiệm cận: $A\left(2;\dfrac{2x_0-2}{x_0-2}\right),\ B(2x_0-2;2)$.

Do $\cos\widehat{ABI}=\dfrac{4}{\sqrt{17}}$ *nên* $\tan\widehat{ABI}=\dfrac{1}{4}=\dfrac{IA}{IB}\Leftrightarrow IB^2=16.IA^2\Leftrightarrow (x_0-2)^4=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=4\end{array}\right.$

Kết luận: Tại $M\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$ *phương trình tiếp tuyến:* $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{2}$

Tại $M\left(4;\dfrac{5}{3}\right)$ *phương trình tiếp tuyến:* $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{7}{2}$

<u>Câu hỏi tương tự</u>:

a) $y=\dfrac{3x-2}{x+1};\cos\widehat{BAI}=\dfrac{5}{\sqrt{26}}$. *ĐS: Δ:* $y=5x-2$ *hoặc Δ:* $y=5x+2$.

Câu 29. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm trên (C) những điểm M sao cho tiếp tuyến tại M của (C) cắt hai tiệm cận của (C) tại A, B sao cho AB ngắn nhất.

• *Lấy điểm* $M\left(m;2+\dfrac{1}{m-2}\right)\in(C)$. *Ta có:* $y'(m)=-\dfrac{1}{(m-2)^2}$

Tiếp tuyến (d) tại M có phương trình: $y=-\dfrac{1}{(m-2)^2}(x-m)+2+\dfrac{1}{m-2}$

Giao điểm của (d) với tiệm cận đứng là: $A\left(2;2+\dfrac{2}{m-2}\right)$

Giao điểm của (d) với tiệm cận ngang là: $B(2m-2;2)$

Ta có: $AB^2=4\left[(m-2)^2+\dfrac{1}{(m-2)^2}\right]\geq 8$. *Dấu "=" xảy ra* $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\m=1\end{array}\right.$

Vậy điểm M cần tìm có tọa độ là: $M(3;3)$ *hoặc* $M(1;1)$

Câu 30. Cho hàm số

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Gọi *M* là điểm bất kì trên (*C*), *I* là giao điểm của các đường tiệm cận. Tiếp tuyến *d* của (*C)* tại *M* cắt các đường tiệm cận tại *A* và *B*. Tìm toạ độ điểm *M* sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác *IAB* có diện tích bằng 2π .

• *Ta có: I(2; 2). Gọi* $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-3}{x_0-2}\right)\in(C),\ x_0\neq 2$. *PTTT d:* $y=\dfrac{-1}{(x_0-2)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0-3}{x_0-2}$

d cắt 2 tiệm cận tại $A\left(2;\dfrac{2x_0-2}{x_0-2}\right),\ B(2x_0-2;2)$.

ΔIAB vuông tại I và $S_{(IAB)}=2\pi\Leftrightarrow(x_0-2)^2+\dfrac{1}{(x_0-2)^2}=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\Rightarrow M(1;1)\\x_0=3\Rightarrow M(3;3)\end{array}\right.$

Câu 31. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (*C*) của hàm số.

2) Gọi *M* là điểm bất kì trên (*C*). Tiếp tuyến của (*C*) tại *M* cắt các đường tiệm cận của (*C*) tại *A* và *B*. Gọi *I* là giao điểm của các đường tiệm cận. Tìm toạ độ điểm *M* sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác *IAB* có diện tích nhỏ nhất.

• *Giả sử* $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-3}{x_0-2}\right)\in(C)$ $x_0\neq 2$, $y'(x_0)=\dfrac{-1}{\left(x_0-2\right)^2}$

Phương trình tiếp tuyến (Δ) với (C) tại M: $y=\dfrac{-1}{\left(x_0-2\right)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0-3}{x_0-2}$

Toạ độ giao điểm A, B của (Δ) với hai tiệm cận là: $A\left(2;\dfrac{2x_0-2}{x_0-2}\right)$; $B\left(2x_0-2;2\right)$

Ta thấy $\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{2+2x_0-2}{2}=x_0=x_M$, $\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{2x_0-3}{x_0-2}=y_M$ $\Rightarrow$ *M là trung điểm của AB.*

Mặt khác I(2; 2) và ΔIAB vuông tại I nên đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích

$$S=\pi IM^2=\pi\left[(x_0-2)^2+\left(\frac{2x_0-3}{x_0-2}-2\right)^2\right]=\pi\left[(x_0-2)^2+\frac{1}{(x_0-2)^2}\right]\geq 2\pi$$

Dấu "=" xảy ra khi $(x_0-2)^2=\dfrac{1}{(x_0-2)^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\\x_0=3\end{array}\right.$

Do đó điểm M cần tìm là M(1; 1) hoặc M(3; 3).

<u>Câu hỏi tương tự</u>:

a) Với $y=\dfrac{3x+2}{x+2}$. *ĐS:* $M(0;1),M(-4;5)$.

Câu 32. Cho hàm số $y=\dfrac{2mx+3}{x-m}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi *m* = 1.

2) Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C). Tìm *m* để tiếp tuyến tại một diểm bất kì của (C) cắt hai tiệm cận tại A và B sao cho ΔIAB có diện tích $S=64$.

• *(C) có tiệm cận đứng* $x=m$, *tiệm cận ngang* $y=2m$. *Giao điểm 2 tiệm cận là* $I(m;2m)$.

Gọi $M\left(x_0;\dfrac{2mx_0+3}{x_0-m}\right)\in(C)$. *PTTT Δ của (C) tại M:* $y=\dfrac{2m^2+3}{(x_0-m)^2}(x-x_0)+\dfrac{2mx_0+3}{x_0-m}$.

Δ cắt TCĐ tại $A\left(m;\dfrac{2mx_0+2m^2+6}{x_0-m}\right)$, *cắt TCN tại* $B(2x_0-m;2m)$.

Ta có: $IA=\left|\dfrac{4m^2+6}{x_0+m}\right|$; $IB=2\left|x_0-m\right|$ $\Rightarrow S_{IAB}=\dfrac{1}{2}IA.IB=4m^2+6=64\Leftrightarrow m=\pm\dfrac{\sqrt{58}}{2}$.

Câu 33. Cho hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tạo với 2 đường tiệm cận của (C) một tam giác có chu vi $P=2\left(2+\sqrt{2}\right)$.

• *(C) có tiệm cận đứng* $x=1$, *tiệm cận ngang* $y=1$. *Giao điểm 2 tiệm cận là* $I(1;1)$.

Gọi $M\left(x_0;\dfrac{x_0}{x_0-1}\right)\in(C)$ $(x_0\neq 1)$. *PTTT Δ của (C) tại M:* $y=-\dfrac{1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{x_0}{x_0-1}$.

Δ cắt TCĐ tại $A\left(1;\dfrac{x_0+1}{x_0-1}\right)$, *cắt TCN tại* $B(2x_0-1;1)$.

Ta có: $P_{IAB}=IA+IB+AB=\dfrac{2}{|x_0-1|}+2|x_0-1|+2\sqrt{(x_0-1)^2+\dfrac{1}{(x_0-1)^2}}\geq 4+2\sqrt{2}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow |x_0-1|=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=0\\ x_0=1\end{array}\right.$.

+ *Với* $x_0=0\Rightarrow$ *PTTT Δ:* $y=-x$; + *Với* $x_0=2\Rightarrow$ *PTTT Δ:* $y=-x+4$.

Câu 34. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận. Tìm điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt 2 tiệm cận tại A và B với chu vi tam giác IAB đạt giá trị nhỏ nhất.

• *Giao điểm của 2 tiệm cận là* $I(1;2)$. *Gọi* $M\left(x_0;2+\dfrac{3}{x_0-1}\right)\in$ *(C).*

+ *PTTT tại M có dạng:* $y=\dfrac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+2+\dfrac{3}{x_0-1}$

+ *Toạ độ các giao điểm của tiếp tuyến với 2 tiệm cận:* $A\left(1;2+\dfrac{6}{x_0-1}\right)$, $B(2x_0-1;2)$

+ *Ta có:* $S_{\Delta IAB}=\dfrac{1}{2}IA.IB=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{6}{|x_0-1|}\cdot 2|x_0-1|=2.3=6$ *(đvdt)*

+ *ΔIAB vuông có diện tích không đổi ⇒ chu vi ΔIAB đạt giá trị nhỏ nhất khi IA= IB*

$$\Leftrightarrow \frac{6}{|x_0-1|}=2|x_0-1|\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1+\sqrt{3}\\ x_0=1-\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm M thỏa mãn điều kiện $M_1\left(1+\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$, $M_2\left(1-\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$

Khi đó chu vi ΔAIB = $4\sqrt{3}+2\sqrt{6}$.

Chú ý: *Với 2 số dương a, b thoả ab = S (không đổi) thì biểu thức P =* $a+b+\sqrt{a^2+b^2}$ *nhỏ nhất khi và chỉ khi a = b.*

Thật vậy: P = $a+b+\sqrt{a^2+b^2}\geq 2\sqrt{ab}+\sqrt{2ab}=(2+\sqrt{2})\sqrt{ab}=(2+\sqrt{2})\sqrt{S}$.

Dấu "=" xảy ra ⇔ a = b.

Câu hỏi tương tự:

a) $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. *ĐS:* $M_1(0;-1),M_2(2;3)$.

Câu 35. Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến cắt 2 tiệm cận tại A và B sao cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác IAB là lớn nhất, với I là giao điểm của 2 tiệm cận.

• *(C) có TCĐ* $x=-1$, *TCN* $y=1$. *Giao điểm 2 tiệm cận là* $I(-1;1)$.

Gọi $M\left(x_0;\dfrac{x_0-2}{x_0+1}\right)\in(C)$*. PTTT Δ của (C) tại M:* $y=\dfrac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\dfrac{x_0-2}{x_0+1}$.

Δ cắt hai tiệm cận tại $A\left(-1;\dfrac{x_0-5}{x_0+1}\right), B(2x_0+1;1)$*. Ta có:* $IA=\dfrac{6}{|x_0+1|}$; $IB=2|x_0+1|$.

$\Rightarrow S_{IAB}=\dfrac{1}{2}IA.IB=6$*. Gọi p, r là nửa chu vi và bán kính đường trọn nội tiếp của ΔIAB.*

Ta có: $S=pr\Rightarrow r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{6}{p}$*. Do đó r lớn nhất ⇔ p nhỏ nhất. Mặt khác ΔIAB vuông tại I nên:*

$2p=IA+IB+AB=IA+IB+\sqrt{IA^2+IB^2}\geq 2\sqrt{IA.IB}+\sqrt{2IA.IB}=4\sqrt{3}+2\sqrt{6}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow IA=IB \Leftrightarrow (x_0+1)^2=3\Leftrightarrow x_0=-1\pm\sqrt{3}$.

+ Với $x=-1-\sqrt{3}\Rightarrow$ *PTTT Δ:* $y=x+2\left(1+\sqrt{3}\right)$

+ Với $x=-1+\sqrt{3}\Rightarrow$ *PTTT Δ:* $y=x+2\left(1-\sqrt{3}\right)$

Câu 36. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm trên hai nhánh của đồ thị (C), các điểm M, N sao cho các tiếp tuyến tại M và N cắt hai đường tiệm cận tại 4 điểm lập thành một hình thang.

• *Gọi* $M(m;y_M)$, $N(n;y_N)$ *là 2 điểm thuộc 2 nhánh của (C). Tiếp tuyến tại M cắt hai tiệm cận tại A, B. Tiếp tuyến tại N cắt hai tiệm cận tại C, D.*

PTTT tại M có dạng: $y=y'(m).(x-m)+y_M\Rightarrow A\left(1;\dfrac{2m+4}{m-1}\right), B(2m-1;2)$.

Tương tự: $C\left(1;\dfrac{2n+4}{n-1}\right), D(2n-1;2)$.

Hai đường thẳng AD và BC đều có hệ số góc: $k=\dfrac{-3}{(m-1)(n-1)}$ *nên AD // BC.*

Vậy mọi điểm M, N thuộc 2 nhánh của (C) đều thoả mãn YCBT.

Câu 37. Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{x-1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Cho điểm $M_o(x_o;y_o)$ thuộc đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại M_0 cắt các tiệm cận của (C) tại các điểm A và B. Chứng minh M_o là trung điểm của đoạn thẳng AB.

• $M_o(x_o;y_o)\in(C)\Rightarrow y_0=1+\dfrac{4}{x_0-1}$*. PTTT (d) tại* M_0*:* $y-y_0=-\dfrac{4}{(x_0-1)^2}(x-x_0)$

Giao điểm của (d) với các tiệm cận là: $A(2x_0-1;1), B(1;2y_0-1)$.

$\Rightarrow \dfrac{x_A+x_B}{2}=x_0; \dfrac{y_A+y_B}{2}=y_0\Rightarrow$ *M_0 là trung điểm AB.*

Câu 38. Cho hàm số : $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ (C)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Chứng minh rằng mọi tiếp tuyến của đồ thị (C) đều lập với hai đường tiệm cận một tam giác có diện tích không đổi.

• *Giả sử* $M\left(a;\dfrac{a+2}{a-1}\right) \in (C)$.

PTTT (d) của (C) tại M: $y = y'(a).(x-a)+\dfrac{a+2}{a-1} \Leftrightarrow y = \dfrac{-3}{(a-1)^2}x+\dfrac{a^2+4a-2}{(a-1)^2}$

Các giao điểm của (d) với các tiệm cận là: $A\left(1;\dfrac{a+5}{a-1}\right)$, $B(2a-1;1)$.

$\vec{IA} = \left(0;\dfrac{6}{a-1}\right) \Rightarrow IA = \dfrac{6}{|a-1|}$; $\vec{IB} = (2a-2;0) \Rightarrow IB = 2|a-1|$

Diện tích ΔIAB : $S_{\Delta IAB} = \dfrac{1}{2}IA.IB = 6$ *(đvdt)* $\Rightarrow$ *ĐPCM.*

Câu hỏi tương tự:

a) $y=\dfrac{2x-4}{x+1}$ *ĐS: S = 12.*

Câu 39. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{1-x}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận, A là điểm trên (C) có hoành độ là *a*. Tiếp tuyến tại A của (C) cắt hai đường tiệm cận tại P và Q. Chứng tỏ rằng A là trung điểm của PQ và tính diện tích tam giác IPQ.

• $I(1;-2)$, $A\left(a;\dfrac{2a-1}{1-a}\right)$. *PT tiếp tuyến d tại A:* $y=\dfrac{1}{(1-a)^2}(x-a)+\dfrac{2a-1}{1-a}$

Giao điểm của tiệm cận đứng và tiếp tuyến d: $P\left(1;\dfrac{2a}{1-a}\right)$

Giao điểm của tiệm cận ngang và tiếp tuyến d: $Q(2a-1;-2)$

Ta có: $x_P + x_Q = 2a = 2x_A$. *Vậy A là trung điểm của PQ.*

$IP = \left|\dfrac{2a}{1-a}+2\right| = \dfrac{2}{|1-a|}$; $IQ = |2(a-1)|$. *Suy ra:* $S_{IPQ} = \dfrac{1}{2}IP.IQ = 2$ *(đvdt)*

Câu 40. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C). Tìm trên đồ thị (C), điểm M có hoành độ dương sao cho tiếp tuyến tại M với đồ thị (C) cắt hai đường tiệm cận tại A và B thoả mãn: $IA^2+IB^2=40$.

• *(C) có TCĐ:* $x=-1$ *; TCX:* $y=2$ $\Rightarrow$ *I(–1; 2). Giả sử* $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-1}{x_0+1}\right) \in (C)$, $(x_0 > 0)$.

PTTT với (C) tại M: $y=\dfrac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0-1}{x_0+1} \Rightarrow A\left(-1;\dfrac{2x_0-4}{x_0+1}\right)$, $B\big((2x_0+1;2\big)$.

$$IA^2+IB^2=40 \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{36}{(x_0+1)^2}+4(x_0+1)^2=40\\ x_0>0\end{cases} \Leftrightarrow x_0 = 2 \ (y_0=1) \Rightarrow M(2;1).$$

Câu 41. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm trên O*y* tất cả các điểm từ đó kẻ được duy nhất một tiếp tuyến tới (C).

• *Gọi* $M(0;y_o)$ *là điểm cần tìm. PT đường thẳng qua M có dạng:* $y = kx + y_o$ *(d)*

(d) là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} = kx + y_o \\ \dfrac{-2}{(x-1)^2} = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y_o - 1)x^2 - 2(y_o + 1)x + y_o + 1 = 0 \quad (1) \\ x \neq 1; \quad \dfrac{-2}{(x-1)^2} = k \end{cases}$ *(*)*

YCBT $\Leftrightarrow$ *hệ (*) có 1 nghiệm* $\Leftrightarrow$ *(1) có 1 nghiệm khác 1*

$\Leftrightarrow \begin{cases} y_o = 1 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} y_o \neq 1 \\ \Delta' = (y_o + 1)^2 - (y_o - 1)(y_o + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2}; y_o = 1 \Rightarrow k = -8 \\ x = 0; y_o = -1 \Rightarrow k = -2 \end{array} \right.$

Vậy có 2 điểm cần tìm là: M(0; 1) và M(0; –1).

Câu 42. Cho hàm số $y = \dfrac{x+3}{x-1}$ (C).
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm trên đường thẳng $d: y = 2x + 1$ các điểm từ đó kẻ được duy nhất một tiếp tuyến tới (C).

• *Gọi* $M(m;2m+1) \in d$. *PT đường thẳng Δ qua M có dạng:* $y = k(x - m) + 2m + 1$

PT hoành độ giao điểm của Δ và (C): $k(x - m) + 2m + 1 = \dfrac{x+3}{x-1}$

$\Leftrightarrow kx^2 - \left[(m+1)k - 2m\right]x + \left[mk - (2m+4)\right] = 0$ *(*)*

Δ tiếp xuc với (C) $\Leftrightarrow$ *(*) có nghiệm kép* $\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta = \left[(m+1)k - 2m\right]^2 - 4k\left[mk - (2m+4)\right] = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ g(k) = (m-1)^2 k^2 - 4(m^2 - m - 4)k + 4m^2 = 0 \end{cases}$

Qua $M(m;2m+1) \in d$ *kẻ được đúng 1 tiếp tuyến đến (C)*

$\Leftrightarrow g(k) = 0$ *có đúng 1 nghiệm* $k \neq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta' = -32(m^2 - m - 2) > 0; g(0) = 4m^2 = 0 \\ \Delta' = -32(m^2 - m - 2) > 0; g(0) = 4m^2 = 0 \\ m - 1 = 0 \Rightarrow 16k + 4 = 0 \Rightarrow k = -\dfrac{1}{4} \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m = 0 & \Rightarrow M(0;1) \\ m = -1 & \Rightarrow M(-1;-1) \\ m = 2 & \Rightarrow M(2;5) \\ m = 1 & \Rightarrow M(1;3) \end{array} \right.$

KSHS 05: BIỆN LUẬN SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH

Câu 1. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+1$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm *m* để phương trình $x^3-3x^2 = m^3-3m^2$ có ba nghiệm phân biệt.

• *PT* $x^3-3x^2 = m^3-3m^2 \Leftrightarrow -x^3+3x^2+1=-m^3+3m^2+1$. *Đặt* $k=-m^3+3m^2+1$

Số nghiệm của PT bằng số giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng d: $y=k$

Dựa vào đồ thị (C) ta có PT có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 1<k<5 \Leftrightarrow m\in(-1;3)\setminus\{0;2\}$

Câu 2. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Biện luận theo *m* số nghiệm của phương trình : $x^2-2x-2=\dfrac{m}{|x-1|}$.

• *Ta có* $x^2-2x-2=\dfrac{m}{|x-1|} \Leftrightarrow \left(x^2-2x-2\right)|x-1|=m, x\neq 1$. *Do đó số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của* $y=\left(x^2-2x-2\right)|x-1|, (C')$ *và đường thẳng* $y=m, x\neq 1$.

Với $y=\left(x^2-2x-2\right)|x-1|=\begin{cases} f(x) & khi\ x>1 \\ -f(x) & khi\ x<1 \end{cases}$ *nên* $\left(C'\right)$ *bao gồm:*

+ *Giữ nguyên đồ thị (C) bên phải đường thẳng* $x=1$.

+ *Lấy đối xứng đồ thị (C) bên trái đường thẳng* $x=1$ *qua Ox.*

Dựa vào đồ thị ta có:

m < –2	*m = –2*	*–2 < m < 0*	*m ≥ 0*
vô nghiệm	***2 nghiệm kép***	***4 nghiệm phân biệt***	***2 nghiệm phân biệt***

Câu 3. Cho hàm số $y=x^4-5x^2+4$ có đồ thị (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm *m* để phương trình $|x^4-5x^2+4|=\log_{12}m$ có 6 nghiệm.

• *Dựa vào đồ thị ta có PT có 6 nghiệm* $\Leftrightarrow \log_{12}m=\dfrac{9}{4} \Leftrightarrow m=12^{\frac{9}{4}}=144\sqrt[4]{12}$.

Câu 4. Cho hàm số: $y=x^4-2x^2+1$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Biện luận theo *m* số nghiệm của phương trình: $x^4-2x^2+1+\log_2 m=0$ $(m>0)$

• $x^4-2x^2+1+\log_2 m=0 \Leftrightarrow x^4-2x^2+1=-\log_2 m$ *(*)*

+ *Số nghiệm của (*) là số giao điểm của 2 đồ thị* $y=x^4-2x^2+1$ *và* $y=-\log_2 m$

+ *Từ đồ thị suy ra:*

$0<m<\frac{1}{2}$	$m=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}<m<1$	$m=1$	$m>1$
2 nghiệm	***3 nghiệm***	***4 nghiệm***	***2 nghiệm***	***vô nghiệm***

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)=8x^4-9x^2+1$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Dựa vào đồ thị (C) hãy biện luận theo m số nghiệm của phương trình:

$$8\cos^4 x - 9\cos^2 x + m = 0 \text{ với } x \in [0;\pi]$$

• *Xét phương trình:* $8\cos^4 x - 9\cos^2 x + m = 0$ *với* $x \in [0;\pi]$ *(1)*

Đặt $t = \cos x$, *phương trình (1) trở thành:* $8t^4 - 9t^2 + m = 0$ *(2)*

Vì $x \in [0;\pi]$ *nên* $t \in [-1;1]$, *giữa x và t có sự tương ứng một đối một, do đó số nghiệm của phương trình (1) và (2) bằng nhau.*

Ta có: $(2) \Leftrightarrow 8t^4 - 9t^2 + 1 = 1 - m$ *(3)*

Gọi (C₁): $y = 8t^4 - 9t^2 + 1$ *với* $t \in [-1;1]$ *và (d):* $y = 1 - m$. *Phương trình (3) là phương trình hoành độ giao điểm của* (C_1) *và (d).*

Chú ý rằng (C_1) *giống như đồ thị (C) trong miền* $-1 \le x \le 1$.

Dựa vào đồ thị ta có kết luận sau:

$m < 0$	$m = 0$	$0 < m < 1$	$1 \le m < \frac{81}{32}$	$m = \frac{81}{32}$	$m > \frac{81}{32}$
vô nghiệm	***1 nghiệm***	***2 nghiệm***	***4 nghiệm***	***2 nghiệm***	***vô nghiệm***

Câu 6. Cho hàm số $y = \dfrac{3x-4}{x-2}$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm các giá trị của *m* để phương trình sau có 2 nghiệm trên đoạn $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = m\,(\sin^4 x + \cos^4 x)$$

• *Xét phương trình:* $\sin^6 x + \cos^6 x = m\,(\sin^4 x + \cos^4 x)$ *(*)*

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = m\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right) \quad \Leftrightarrow 4 - 3\sin^2 2x = 2m(2 - \sin^2 2x) \qquad (1)$$

Đặt $t = \sin^2 2x$. *Với* $x \in \left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$ *thì* $t \in [0;1]$. *Khi đó (1) trở thành:* $2m = \dfrac{3t-4}{t-2}$ *với* $t \in [0;1]$

Nhận xét : với mỗi $t \in [0;1]$ *ta có :* $\left[\begin{array}{l}\sin 2x = -\sqrt{t}\\ \sin 2x = \sqrt{t}\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin 2x = \sqrt{t}$

Để (*) có 2 nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$ *thì* $\sqrt{t} \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2};1\right) \Rightarrow t \in \left[\frac{3}{4};1\right)$

Dưa vào đồ thị (C) ta có: $y(1) < 2m \le y\left(\frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow 1 < 2m \le \frac{7}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m \le \frac{7}{10}$.

Câu 7. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Biện luận theo *m* số nghiệm của phương trình $\dfrac{|x|+1}{|x|-1} = m$.

• Số nghiệm của $\dfrac{|x|+1}{|x|-1} = m$ bằng số giao điểm của đồ thị (C′): $y = \dfrac{|x|+1}{|x|-1}$ và $y = m$.

Dựa vào đồ thị ta suy ra được:

$m < -1; m > 1$	$m = -1$	$-1 < m \le 1$
2 nghiệm	**1 nghiệm**	**vô nghiệm**

KSHS 06: ĐIỂM ĐẶC BIỆT CỦA ĐỒ THỊ

Kiến thức cơ bản:

1) Khoảng cách giữa hai điểm A, B: AB = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

2) Khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0)$ đến đường thẳng Δ: $ax + by + c = 0$:

$$d(M, d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Đặc biệt: + Nếu Δ: $x = a$ thì $d(M, \Delta) = |x_0 - a|$

+ Nếu Δ: $y = b$ thì $d(M, \Delta) = |y_0 - b|$

+ Tổng các khoảng cách từ M đến các trục toạ độ là: $|x_0| + |y_0|$.

3) Diện tích tam giác ABC: S = $\frac{1}{2} AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$

4) Các điểm A, B đối xứng nhau qua điểm I ⇔ $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 0$ ⇔ $\begin{cases} x_A + x_B = 2x_I \\ y_A + y_B = 2y_I \end{cases}$

5) Các điểm A, B đối xứng nhau qua đường thẳng Δ ⇔ $\begin{cases} AB \perp \Delta \\ I \in \Delta \end{cases}$ (I là trung điểm AB).

Đặc biệt: + A, B đối xứng nhau qua trục Ox ⇔ $\begin{cases} x_B = x_A \\ y_B = -y_A \end{cases}$

+ A, B đối xứng nhau qua trục Ox ⇔ $\begin{cases} x_B = x_A \\ y_B = -y_A \end{cases}$

6) Khoảng cách giữa đường thẳng Δ với đường cong (C) bằng khoảng cách nhỏ nhất giữa một điểm M ∈ Δ và một điểm N ∈ (C).

7) Điểm $M(x; y)$ được gọi là có toạ độ nguyên nếu x, y đều là số nguyên.

Câu 1. Cho hàm số $y=-x^3+3x+2$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm 2 điểm trên đồ thị hàm số sao cho chúng đối xứng nhau qua tâm M(–1; 3).

• *Gọi* $A\left(x_0;y_0\right)$, *B là điểm đối xứng với A qua điểm* $M(-1;3)\Rightarrow B\left(-2-x_0;6-y_0\right)$

$$A,B\in(C)\Leftrightarrow\begin{cases}y_0=-x_0^3+3x_0+2\\6-y_0=-(-2-x_0)^3+3(-2-x_0)+2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 6=-x_0^3+3x_0+2-\left(-2-x_0\right)^3+3\left(-2-x_0\right)+2\Leftrightarrow 6x_0^2+12x_0+6=0\ \Leftrightarrow\ x_0=-1\Rightarrow y_0=0$$

Vậy 2 điểm cần tìm là: $(-1;0)$ *và* $(-1;6)$

Câu 2. Cho hàm số $y=-\dfrac{x^3}{3}+x^2+3x-\dfrac{11}{3}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm trên đồ thị (C) hai điểm phân biệt M, N đối xứng nhau qua trục tung.

• *Hai điểm* $M(x_1;y_1),N(x_2;y_2)\in(C)$ *đối xứng nhau qua Oy* $\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=-x_1\neq0\\y_1=y_2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=-x_1\neq0\\-\dfrac{x_1^3}{3}+x_1^2+3x_1-\dfrac{11}{3}=-\dfrac{x_2^3}{3}+x_2^3+3x_2-\dfrac{11}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=3\\x_2=-3\end{cases}\ \textit{hoặc}\ \begin{cases}x_1=-3\\x_2=3\end{cases}$$

Vậy hai điểm thuộc đồ thị (C) và đối xứng qua Oy là: $M\left(3;\dfrac{16}{3}\right),N\left(-3;\dfrac{16}{3}\right)$.

Câu 3. Cho hàm số $y=-x^3+3x+2$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm trên (C) hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng *d*: $2x-y+2=0$.

• *Gọi* $M\left(x_1;y_1\right);N\left(x_2;y_2\right)$ *thuộc (C) là hai điểm đối xứng qua đường thẳng d*

I là trung điểm của AB nên $I\left(\dfrac{x_1+x_2}{2};\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$, *ta có* $I\in d$

Có: $$\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{\left(-x_1^3+3x_1+2\right)+\left(-x_2^3+3x_2+2\right)}{2}=2.\frac{x_1+x_2}{2}+2$$

$$\Rightarrow-\left(x_1+x_2\right)^3+3x_1x_2\left(x_1+x_2\right)+3\left(x_1+x_2\right)=2\left(x_1+x_2\right)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1+x_2=0\\x_1^2-x_1x_2+x_2^2=1\end{array}\right.$$

Mặt khác: $MN\perp d\Rightarrow\left(x_2-x_1\right).1+\left(y_2-y_1\right).2=0$

$$\Rightarrow7\left(x_2-x_1\right)-2\left(x_2-x_1\right)\left(x_1^2+x_1x_2+x_2^2\right)=0\Rightarrow x_1^2+x_1x_2+x_2^2=\frac{7}{2}$$

- *Xét* $x_1+x_2=0\Rightarrow x_1=\pm\sqrt{\dfrac{7}{2}};x_2=\mp\sqrt{\dfrac{7}{2}}$

- *Xét* $\begin{cases}x_1^2-x_1x_2+x_2^2=1\\x_1^2+x_1x_2+x_2^2=\dfrac{7}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1^2+x_2^2=\dfrac{9}{4}\\x_1x_2=\dfrac{5}{4}\end{cases}\Rightarrow$ *vô nghiệm*

Vậy 2 điểm cần tìm là: $\left(\sqrt{\dfrac{7}{2}};2-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{7}{2}}\right);\left(-\sqrt{\dfrac{7}{2}};2+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{7}{2}}\right)$

Câu 4. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+\frac{5}{3}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Gọi A, B là các giao điểm của (C) với trục Ox. Chứng minh rằng trên đồ thị (C) tồn tại hai điểm cùng nhìn đoạn AB dưới một góc vuông.

• *PT hoành độ giao điểm của (C) với trục hoành:* $\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+\frac{5}{3}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-5 \end{array}\right.$

$\Rightarrow A(-5;0), B(1;0)$. *Gọi* $M\left(a;\frac{1}{3}a^3+a^2-3a+\frac{5}{3}\right)\in(C),\ M\neq A,B$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\left(a+5;\frac{1}{3}a^3+a^2-3a+\frac{5}{3}\right),\ \overrightarrow{BM}=\left(a-1;\frac{1}{3}a^3+a^2-3a+\frac{5}{3}\right)$

$AM\perp BM \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0 \Leftrightarrow (a+5)(a-1)+\frac{1}{9}(a+5)^2(a-1)^4=0$

$\Leftrightarrow 1+\frac{1}{9}(a-1)^3(a+5)=0 \Leftrightarrow a^4+2a^3-12a^2+14a+4=0$ (*)

Đặt $y=a^4+2a^3-12a^2+14a+4=0$*, có tập xác định D = R.*

$y'=4a^3+6a^2-12a+14$*;* $y'=0$ *có 1 nghiệm thực* $a_0\approx-\frac{7}{2}\Rightarrow y_0\approx-\frac{2043}{16}$

Dựa vào BBT ta suy ra (*) luôn có 2 nghiệm khác 1 và –5.

Vậy luôn tồn tại 2 điểm thuộc (C) cùng nhìn đoạn AB dưới một góc vuông.

Câu 5. Cho hàm số $y=x^4-2x^2+1$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm toạ độ hai điểm P, Q thuộc (C) sao cho đường thẳng PQ song song với trục hoành và khoảng cách từ điểm cực đại của (C) đến đường thẳng PQ bằng 8.

• *Điểm cực đại của (C) là* $A(0;1)$*. PT đường thẳng PQ có dạng:* $y=m\ (m\geq 0)$.

Vì $d(A,PQ)=8$ *nên* $m=9$*. Khi đó hoành độ các điểm P, Q là nghiệm của phương trình:*

$x^4-2x^2-8=0\Leftrightarrow x=\pm 2$.

Vậy: $P(-2;9), Q(2;9)$ *hoặc* $P(2;9), Q(-2;9)$.

Câu 6. Cho hàm số $y=x^4+mx^2-m-1$ (C_m).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi *m* = –2.

2) Chứng minh rằng khi *m* thay đổi thì (C_m) luôn luôn đi qua hai điểm cố định A, B. Tìm *m* để các tiếp tuyến tại A và B vuông góc với nhau.

• *Hai điểm cố định A(1; 0), B(–1; 0). Ta có:* $y'=4x^3+2mx$.

Các tiếp tuyến tại A và B vuông góc với nhau $\Leftrightarrow y'(1).y'(-1)=-1 \Leftrightarrow (4+2m)^2=1$

$\Leftrightarrow m=-\frac{3}{2}; m=-\frac{5}{2}$.

Câu 7. Cho hàm số $y=\frac{x+2}{2x-1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm những điểm trên đồ thị (C) cách đều hai điểm A(2; 0) và B(0; 2).

• *PT đường trung trực đọan AB:* $y=x$.

Những điểm thuộc đồ thị cách đều A và B có hoành độ là nghiệm của PT:

$\frac{x+2}{2x-1}=x \Leftrightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}; x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Hai điểm cần tìm là: $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right);\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Câu 8. Cho hàm số $y=\frac{3x-4}{x-2}$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm các điểm thuộc (C) cách đều 2 tiệm cận.

• *Gọi* $M(x;y)\in$ *(C) và cách đều 2 tiệm cận x = 2 và y = 3.*

Ta có: $|x-2|=|y-3|\Leftrightarrow|x-2|=\left|\frac{3x-4}{x-2}-2\right|\Leftrightarrow|x-2|=\left|\frac{x}{x-2}\right|\Leftrightarrow\frac{x}{x-2}=\pm(x-2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=4\end{array}\right.$

Vậy có 2 điểm thoả mãn đề bài là : $M_1(1;1)$ *và* $M_2(4;6)$

Câu 9. Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x+1}$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm trên (C) những điểm có tổng khoảng cách đến hai tiệm cận của (C) nhỏ nhất.

• *Gọi* $M(x_0;y_0)\in$ *(C),* $(x_0\neq-1)$ *thì* $y_0=\frac{2x_0+1}{x_0+1}=2-\frac{1}{x_0+1}$

Gọi A, B lần lượt là hình chiếu của M trên TCĐ và TCN thì:

$$MA=|x_0+1|,\ MB=|y_0-2|=\left|\frac{1}{x_0+1}\right|$$

Áp dụng BĐT Cô-si ta có: $MA+MB\geq2\sqrt{MA.MB}=2\sqrt{|x_0+1|.\left|\frac{1}{x_0+1}\right|}=2$

$\Rightarrow$ *MA + MB nhỏ nhất bằng 2 khi* $|x_0+1|=\frac{1}{|x_0+1|}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=-2\end{array}\right.$.

Vậy ta có hai điểm cần tìm là (0; 1) và (–2; 3).

<u>Câu hỏi tương tự</u>:

a) $y=\frac{2x-1}{x+1}$ *ĐS:* $x_0=-1\pm\sqrt{3}$ b) $y=\frac{3x-5}{x-2}$ *ĐS:* $M(1;2),M(3;4)$

Câu 10. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}$ (C).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm điểm M thuộc đồ thị (C) để tiếp tuyến của (C) tại M với đường thẳng đi qua M và giao điểm hai đường tiệm cận có tích các hệ số góc bằng –9.

• *Giao điểm 2 tiệm cận là* $I(-1;2)$.

Gọi $M\left(x_0;2-\frac{3}{x_0+1}\right)\in(C)\Rightarrow k_{IM}=\frac{y_M-y_I}{x_M-x_I}=\frac{-3}{(x_0+1)^2}$

+ Hệ số góc của tiếp tuyến tại M: $k_M=y'(x_0)=\frac{3}{(x_0+1)^2}$

+ YCBT $\Leftrightarrow k_M.k_{IM}=-9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=-2\end{array}\right.$. *Vậy có 2 điểm M thỏa mãn: M(0; –3) và M(–2; 5)*

Câu 11. Cho hàm số $y=\frac{x+2}{x-1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm điểm M trên (C) sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $d: 2x + y - 2 = 0$ bằng $k = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$.

• *Gọi* $M\left(m; \dfrac{m+2}{m-1}\right) \in (C)$. *Ta có:* $d(M,d) = \dfrac{6\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \left|2m^2 - 3m + 4\right| = 6|m-1|$

$\Leftrightarrow\ m = 2; m = \dfrac{5}{2}; m = -2; m = \dfrac{1}{2} \ \Rightarrow\ M(2;4);\ M\left(\dfrac{5}{2};3\right);\ M(-2;0);\ M\left(\dfrac{1}{2};-5\right)$.

<u>Câu hỏi tương tự</u>:.

a) $y = \dfrac{3x-1}{x-2};\ d: 3x - 4y + 1 = 0;\ k = \dfrac{12}{5}$. *ĐS:* $M(1;-2);\ M\left(\dfrac{16}{3};\dfrac{15}{4}\right);\ M\left(-2;\dfrac{7}{4}\right);\ M\left(\dfrac{11}{3};6\right)$.

Câu 12. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$.
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm điểm M trên đồ thị (C) sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $d: x - 4y + 8 = 0$ là ngắn nhất.

• *Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) song song với d*

$\Rightarrow$ *PTTT của (C) là* $\Delta_1: y = \dfrac{x}{4} + \dfrac{5}{4}$ *hoặc* $\Delta_2: y = \dfrac{x}{4} + \dfrac{13}{4}$

Các tiếp điểm tương ứng: $M_1\left(1;\dfrac{3}{2}\right), M_2\left(-3;\dfrac{5}{2}\right)$. *Ta tính được* $d(M_1,\Delta) < d(M_2,\Delta)$.

$\Rightarrow M_1\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$ *là điểm cần tìm.*

<u>Cách 2:</u> Giả sử $M\left(x;\dfrac{2x+1}{x+1}\right) \in (C)$. *Tính* $f = d(M,d)$. *Sử dụng phương pháp hàm số để tìm* $\min f$.

Câu 13. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$.
1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm tọa độ điểm M ∈ (C) sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất.

• *Giả sử* $M\left(x_0; 2 - \dfrac{3}{x_0+1}\right) \in (C)$. *PTTT Δ của (C) tại M là:*

$$y - 2 + \frac{3}{x_0+1} = \frac{3}{(x_0+1)^2}(x - x_0) \ \Leftrightarrow\ 3(x - x_0) - (x_0+1)^2(y-2) - 3(x_0+1) = 0$$

Khoảng cách từ $I(-1;2)$ *tới tiếp tuyến Δ là:*

$$d = \frac{\left|3(-1-x_0) - 3(x_0+1)\right|}{\sqrt{9 + \left(x_0+1\right)^4}} = \frac{6\left|x_0+1\right|}{\sqrt{9 + (x_0+1)^4}} = \frac{6}{\sqrt{\dfrac{9}{(x_0+1)^2} + (x_0+1)^2}}.$$

Theo BĐT Cô–si: $\dfrac{9}{(x_0+1)^2} + (x_0+1)^2 \ge 2\sqrt{9} = 6 \ \Rightarrow\ d \le \sqrt{6}$.

Khoảng cách d lớn nhất bằng $\sqrt{6}$ *khi* $\dfrac{9}{(x_0+1)^2} = (x_0+1)^2 \Leftrightarrow (x_0+1)^2 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -1 \pm \sqrt{3}$.

Vậy có hai điểm cần tìm là: $M\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$ *hoặc* $M\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$

Câu 14. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-4}{x+1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm trên (C) hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng MN biết M(–3; 0) và N(–1; –1).

• $\overrightarrow{MN}=(2;-1)$ $\Rightarrow$ *Phương trình MN:* $x+2y+3=0$.

Phương trình đường thẳng $(d)\perp MN$ *có dạng:* $y=2x+m$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d):

$$\frac{2x-4}{x+1}=2x+m \Leftrightarrow 2x^2+mx+m+4=0\ (x\neq -1) \qquad (1)$$

(d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B $\Leftrightarrow \Delta=m^2-8m-32>0$ *(2)*

Khi đó $A(x_1;2x_1+m), B(x_2;2x_2+m)$ *với* x_1, x_2 *là các nghiệm của (1)*

Trung điểm của AB là $I\left(\dfrac{x_1+x_2}{2};x_1+x_2+m\right)\equiv I\left(-\dfrac{m}{4};\dfrac{m}{2}\right)$ *(theo định lý Vi-et)*

A, B đối xứng nhau qua MN $\Leftrightarrow I\in MN \Leftrightarrow m=-4$

Suy ra (1) $\Leftrightarrow 2x^2-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$ $\Rightarrow$ *A(0; –4), B(2; 0).*

Câu 15. Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x-1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm trên đồ thị (C) hai điểm B, C thuộc hai nhánh sao cho tam giác ABC vuông cân tại đỉnh A với A(2; 0).

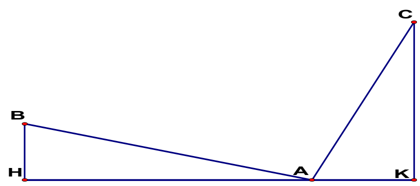
• *Ta có* $(C): y=2+\dfrac{2}{x-1}$. *Gọi* $B\left(b;2+\dfrac{2}{b-1}\right)$, $C\left(c;2+\dfrac{2}{c-1}\right)$ *với* $b<1<c$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B, C lên trục Ox.

Ta có: $AB=AC;\ \widehat{BAC}=90^0 \Rightarrow \widehat{CAK}+\widehat{BAH}=90^0=\widehat{CAK}+\widehat{ACK}\Rightarrow \widehat{BAH}=\widehat{ACK}$

và: $\widehat{BHA}=\widehat{CKA}=90^0 \Rightarrow \Delta ABH=\Delta CAK \Rightarrow \begin{cases}AH=CK\\HB=AK\end{cases}$

Hay: $\begin{cases}2-b=2+\dfrac{2}{c-1}\\ \left|2+\dfrac{2}{b-1}\right|=|c-2|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-1\\c=3\end{cases}$.



Vậy $B(-1;1),\ C(3;3)$

Câu 16. Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2) Tìm trên hai nhánh của đồ thị (C) hai điểm A và B sao cho AB ngắn nhất.

• *Tập xác định* $D=R\backslash\{-1\}$. *Tiệm cận đứng* $x=-1$.

Giả sử $A\left(-1-a;1+\dfrac{4}{a}\right), B\left(-1+b;1-\dfrac{4}{b}\right)$ *(với* $a>0,b>0$*) là 2 điểm thuộc 2 nhánh của (C)*

$$AB^2=(a+b)^2+16\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2=(a+b)^2\left[1+\frac{16}{a^2b^2}\right]\geq 4ab\left[1+\frac{16}{a^2b^2}\right]=4ab+\frac{64}{ab}\geq 32$$

AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow AB = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 4ab = \dfrac{16}{ab} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a^4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \sqrt[4]{4}$

Khi đó: $A\left(-1-\sqrt[4]{4};1+\sqrt[4]{64}\right), B\left(-1+\sqrt[4]{4};1-\sqrt[4]{64}\right)$.

<u>*Câu hỏi tương tự*</u>:

a) $y = \dfrac{4x-9}{x-3}$. *ĐS:* $A\left(3-\sqrt{3};4-\sqrt{3}\right), B\left(3+\sqrt{3};4+\sqrt{3}\right)$

Câu 17. Cho hàm số $y = \dfrac{-x+1}{x-2}$.

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2) Tìm trên đồ thị (C), các điểm A, B sao cho độ dài đoạn AB bằng 4 và đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng $d: y = x$.

• *PT đường thẳng AB có dạng:* $y = -x + m$. *PT hoành độ giao điểm của (C) và AB:*

$$\frac{-x+1}{x-2} = -x + m \Leftrightarrow g(x) = x^2 - (m+3)x + 2m + 1 = 0 \;\; (1) \;\; (x \neq 2)$$

Để có 2 điểm A, B thì (1) phải có 2 nghiệm phân biệt khác 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g > 0 \\ g(2) \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (m+3)^2 - 4(2m+1) > 0 \\ 4 - (m+3).2 + 2m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m$.

Ta có: $\begin{cases} x_A + x_B = m+3 \\ x_A.x_B = 2m+1 \end{cases}$. *Mặt khác* $y_A = -x_A + m;\; y_B = -x_B + m$

Do đó: AB = 4 $\Leftrightarrow (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = 16 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 3 \end{array}\right.$.

+ *Với* $m = 3$, *thay vào (1) ta được:* $x^2 - 6x + 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3+\sqrt{2} \Rightarrow y = -\sqrt{2} \\ x = 3-\sqrt{2} \Rightarrow y = \sqrt{2} \end{array}\right.$

$\Rightarrow A(3+\sqrt{2};-\sqrt{2}),\, B(3-\sqrt{2};\sqrt{2})$ *hoặc* $A(3-\sqrt{2};\sqrt{2}),\, B(3+\sqrt{2};-\sqrt{2})$

+ *Với* $m = -1$, *thay vào (1) ta được:* $x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1+\sqrt{2} \Rightarrow y = -2-\sqrt{2} \\ x = 1-\sqrt{2} \Rightarrow y = -2+\sqrt{2} \end{array}\right.$

$\Rightarrow A(1+\sqrt{2};-2-\sqrt{2});\, B(1-\sqrt{2};-2+\sqrt{2})$ *hoặc* $A(1-\sqrt{2};-2+\sqrt{2});\, B(1+\sqrt{2};-2-\sqrt{2})$

Câu 18. Cho hàm số $y = \dfrac{3x^2+5x+14}{6x+1}$ có đồ thị (C).

Tìm tất các các điểm trên (C) có toạ độ nguyên.

• *Ta có:* $y = \dfrac{1}{4}\left(2x+3+\dfrac{53}{6x+1}\right)$.

Điểm $M(x;y) \in (C)$ *có toạ độ nguyên* $\Leftrightarrow \begin{cases} x \in Z \\ y = \dfrac{1}{4}\left(2x+3+\dfrac{53}{6x+1}\right) \in Z \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in Z \\ \left(2x+3+\dfrac{53}{6x+1}\right) \in Z \\ \left(2x+3+\dfrac{53}{6x+1}\right) \vdots\, 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in Z \\ \dfrac{53}{6x+1} \in Z \\ \left(2x+3+\dfrac{53}{6x+1}\right) \vdots\, 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in Z \\ 6x+1 = \pm 1 \vee 6x+1 = \pm 53 \\ \left(2x+3+\dfrac{53}{6x+1}\right) \vdots\, 4 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 14 \\ x = -9 \Rightarrow y = -4 \end{array}\right.$. *Vậy có hai điểm thoả YCBT:* $(0;14), (-9;-4)$.

Câu 19. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 2}$ có đồ thị (C).

Tìm những cặp điểm trên đồ thị (C) đối xứng nhau qua điểm $I\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

• *Gọi* $M(x_1;y_1), N(x_2;y_2) \in (C)$ *đối xứng nhau qua điểm* $I\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

Khi đó ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ y_1 + y_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 1 - x_1 \\ y_2 = 2 - y_1 \end{cases} \Rightarrow N(1 - x_1; 2 - y_1)$.

Vì $M(x_1;y_1), N(x_2;y_2) \in (C)$ *nên ta có:* $\begin{cases} y_1 = \dfrac{x_1^2 - 3x_1 + 6}{x_1 - 2} \\ 2 - y_1 = \dfrac{x_1^2 - x_1 + 4}{-x_1 - 1} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -2; y_1 = -4 \\ x_1 = 3; y_1 = 6 \end{array}\right.$.

Vậy trên (C) có đúng một cặp điểm thoả YCBT: $M(-2;-4), N(3;6)$.

Câu 20. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ có đồ thị (C).

Tìm những cặp điểm trên đồ thị (C) đối xứng nhau qua đường thẳng $d: 16x + 17y + 33 = 0$.

• *ĐS:* $A\left(-5; -\dfrac{21}{4}\right), B\left(3; \dfrac{13}{4}\right)$.

Chân thành cảm ơn các bạn đồng nghiệp và các em học sinh đã đọc tập tài liệu này.

transitung_tv@yahoo.com