SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NAM

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 THCS
NĂM HỌC 2012-2013
Môn thi: TOÁN
Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề

Bài 1. (*4,0 điểm*)

Cho biểu thức: $P=\dfrac{x}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(1-\sqrt{y})}-\dfrac{y}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+1)}-\dfrac{xy}{(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{y})}$

1. Rút gọn biểu thức *P*.
2. Tìm các giá trị *x, y* nguyên thỏa mãn *P* = 2.

Bài 2. (*4,0 điểm*)

1. Cho hai số thực *a, b* không âm thỏa mãn $18a+4b\geq 2013$. Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm: $18ax^2+4bx+671-9a=0$.

2. Tìm tất cả các nghiệm nguyên *x, y* của phương trình $x^3+2x^2+3x+2=y^3$.

Bài 3. (*4,5 điểm*)

1. Cho *p* và *2p + 1* là hai số nguyên tố lớn hơn *3*. Chứng minh rằng *4p + 1* là một hợp số.

2. Giải phương trình: $4x^2+3x+3=4\sqrt{x^3+3x^2}+2\sqrt{2x-1}$

Bài 4. (6,0 *điểm*)

Cho góc xOy có số đo bằng 60^o. Đường tròn có tâm K nằm trong góc xOy tiếp xúc với tia Ox tại M và tiếp xúc với tia Oy tại N. Trên tia Ox lấy điểm P thỏa mãn OP = 3OM. Tiếp tuyến của đường tròn (K) qua P cắt tia Oy tại Q khác O. Đường thẳng PK cắt đường thẳng MN ở E. Đường thẳng QK cắt đường thẳng MN ở F.

1. Chứng minh tam giác MPE đồng dạng với tam giác KPQ.
2. Chứng minh tứ giác PQEF nội tiếp được trong đường tròn.
3. Gọi D là trung điểm của đoạn PQ. Chứng minh tam giác DEF là một tam giác đều.

Bài 5. (*2,0 điểm*)

Cho *a, b, c* là ba số thực dương thỏa mãn: $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+1}{1+b^2}+\frac{b+1}{1+c^2}+\frac{c+1}{1+a^2}\geq 3$$

------HẾT------

Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay.

Họ và tên thí sinh: .... Số báo danh: ....

Chữ ký của giám thị 1: .... Chữ ký của giám thị 2: ....

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NAM

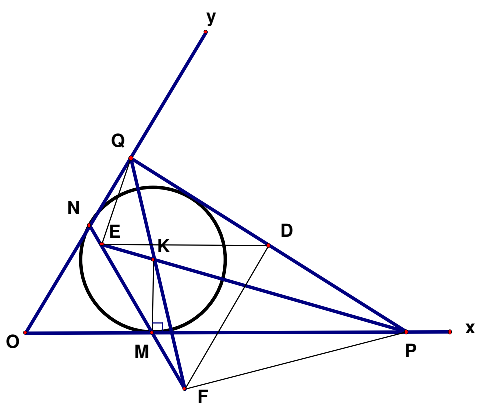
ĐÁP ÁN CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 THCS
NĂM HỌC 2012-2013
Môn thi: TOÁN

ĐÁP ÁN-BIỂU ĐIỂM

(Đáp án biểu điểm này gồm 3 trang)

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1.1 (2,5 đ)	Điều kiện để P xác định là : $x \ge 0$; $y \ge 0$; $y \ne 1$; $x + y \ne 0$.	0,5
	$P = \dfrac{x(1+\sqrt{x}) - y(1-\sqrt{y}) - xy\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{y}\right)} = \dfrac{(x-y) + \left(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\right) - xy\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{y}\right)}$	0,5
	$= \dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}+x-\sqrt{xy}+y-xy\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{y}\right)} = \dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right) - \sqrt{y}\left(\sqrt{x}+1\right) + y\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{y}\right)}$	0,5
	$= \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{y} + y - y\sqrt{x}}{\left(1-\sqrt{y}\right)} = \dfrac{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{y}\right)\left(1+\sqrt{y}\right) - \sqrt{y}\left(1-\sqrt{y}\right)}{\left(1-\sqrt{y}\right)}$	0,5
	$= \sqrt{x} + \sqrt{xy} - \sqrt{y}$	0,5
Câu 1.2 (1,5 đ)	P = 2 $\Leftrightarrow$ $\sqrt{x} + \sqrt{xy} - \sqrt{y} = 2$ với $x \ge 0$; $y \ge 0$; $y \ne 1$; $x + y \ne 0$ $\Leftrightarrow \sqrt{x}\left(1+\sqrt{y}\right) - \left(\sqrt{y}+1\right) = 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)\left(1+\sqrt{y}\right) = 1$	0,5
	Ta có: $1 + \sqrt{y} \ge 1 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 \le 1 \Leftrightarrow 0 \le x \le 4 \Rightarrow$ x = 0; 1; 2; 3 ; 4	0,5
	Thay vào P ta có các cặp giá trị (4; 0) và (2 ; 2) thoả mãn	0,5
Câu 2.1 (2,0 đ)	**Cho hai số thực *a, b* thỏa mãn** $18a + 4b \ge 2013$ **(1)** **Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm:** $18ax^2 + 4bx + 671 - 9a = 0$ **(2)**	
	<u>TH1 :</u> Với a = 0 thì (2) $\Leftrightarrow 4bx + 671 = 0$ Từ (1) $\Rightarrow b \ne 0$. Vậy (2) luôn có nghiệm $x = -\dfrac{671}{4b}$	0,5
	<u>TH2 :</u> Với $a \ne 0$, ta có : $\Delta' = 4b^2 - 18a(671-9a) = 4b^2 - 6a.2013 + 162a^2$	0,5
	$\ge 4b^2 - 6a(18a+4b) + 162a^2 = 4b^2 - 24ab + 54a^2 = (2b-6a)^2 + 16a^2 \ge 0, \forall a, b$	0,5
	Vậy pt luôn có nghiệm	0,5
Câu 2.2 (2,0 đ)	**Tìm các số nguyên *x, y* thỏa mãn phương trình:** $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$	
	Ta có $y^3 - x^3 = 2x^2 + 3x + 2 = 2\left(x + \dfrac{3}{4}\right)^2 + \dfrac{7}{8} > 0 \Rightarrow x < y$ (1)	0,5
	$(x+2)^3 - y^3 = 4x^2 + 9x + 6 = \left(2x + \dfrac{9}{4}\right)^2 + \dfrac{15}{16} > 0 \Rightarrow y < x + 2$ (2)	0,5
	Từ (1) và (2) ta có $x < y < x+2$ mà x, y nguyên suy ra $y = x + 1$	0,5
	Thay y = x + 1 vào pt ban đầu và giải phương trình tìm được x = -1; x = 1 từ đó tìm được hai cặp số (x, y) thỏa mãn bài toán là (1 ; 2), (-1 ; 0)	0,5
Câu 3.1	Do *p* là số nguyên tố lớn hơn 3 nên *p* có dạng $p = 3k \pm 1$	0,5
	*) Nếu $p = 3k + 1$ thì $2p + 1 = 6k + 3 = 3(2k + 1)$	0,5

(2,0đ)	$\Rightarrow 2p+1$ là hợp số (Vô lý)	
	*) Nếu $p=3k-1, k\ge 2$ thì $4p+1=12k-3=3(4k-1)$	0,5
	Do $4k-1\ge 7$ nên $4p+1$ là một hợp số.	0,5
Câu 3.2 (2,5 đ)	Điều kiện: $x\ge\dfrac{1}{2}$	0,5
	PT $\Leftrightarrow 4x^2+3x+3=4x\sqrt{x+3}+2\sqrt{2x-1}$ $\Leftrightarrow \left(4x^2-4x\sqrt{x+3}+x+3\right)+\left(1-2\sqrt{2x-1}+2x-1\right)=0$	0,5
	$\Leftrightarrow \left(2x-\sqrt{x+3}\right)^2+\left(1-\sqrt{2x-1}\right)^2=0$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases}2x=\sqrt{x+3}\\ 1=\sqrt{2x-1}\end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases}4x^2=x+3\\ 1=2x-1\end{cases} \Leftrightarrow x=1$ (tmđk)	0,5
Câu 4		
Câu 4.1 (2,5 đ)	 Hình vẽ đúng.	0,5
	+PK là phân giác góc $\widehat{QPO}$ $\Rightarrow \widehat{MPE}=\widehat{KPQ}$ (*) .	0,5
	+ Tam giác OMN đều $\Rightarrow \widehat{EMP}=120^0$. + QK cũng là phân giác $\widehat{OQP}$ $\widehat{QKP}=180^0-\left(\widehat{KQP}+\widehat{KPQ}\right)$	0,5
	Mà $2\widehat{KQP}+2\widehat{KPQ}=180^0-60^0=120^0$ $\Rightarrow \widehat{QKP}=120^0$. Do đó: $\widehat{EMP}=\widehat{QKP}$ (**).	0,5
	Từ (*) và (**), ta có $\Delta MPE \backsim \Delta KPQ$	0,5
Câu 4.2 (1,0 đ)	Do hai tam giác MPE và KPQ đồng dạng nên: $\widehat{MEP}=\widehat{KQP}$	0,5
	hay: $\widehat{FEP}=\widehat{FQP}$ Suy ra, tứ giác PQEF nội tiếp được trong đường tròn.	0,5
Câu 4.3 (2,5 đ)	**Gọi D là trung điểm của đoạn PQ. Chứng minh tam giác DEF là một tam giác đều.**	
	Do hai tam giác MPE và KPQ đồng dạng nên: $\dfrac{PM}{PK}=\dfrac{PE}{PQ}$. Suy ra: $\dfrac{PM}{PE}=\dfrac{PK}{PQ}$. Ngoài ra: $\widehat{MPK}=\widehat{EPQ}$. Do đó, hai tam giác MPK và EPQ đồng dạng.	0,5
	Từ đó: $\widehat{PEQ}=\widehat{PMK}=90^0$.	0,5
	Suy ra, D là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác PQEF. Vì vậy, tam giác DEF cân tại D.	0,5
	Ta có: $\widehat{FDP}=2\widehat{FQD}=\widehat{OQP}$; $\widehat{EDQ}=2\widehat{EPD}=\widehat{OPQ}$.	0,5
	$\widehat{FDE}=180^0-\left(\widehat{FDP}+\widehat{EDQ}\right)=\widehat{POQ}=60^0$ Từ đó, tam giác DEF là tam giác đều.	0,5
Câu 5	**Cho *a, b, c* là ba số thực dương thỏa mãn: $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:**	

(2,0 đ)	$$\frac{a+1}{1+b^2}+\frac{b+1}{1+c^2}+\frac{c+1}{1+a^2}\ge 3$$	
	Theo bất đẳng thức Cauchy ta có: $1+b^2\ge 2b$ nên: $$\frac{a+1}{1+b^2}=(a+1)-\frac{b^2(a+1)}{b^2+1}\ge(a+1)-\frac{b^2(a+1)}{2b}=a+1-\frac{ab+b}{2}$$ $$\Leftrightarrow\frac{a+1}{1+b^2}\ge a+1-\frac{ab+b}{2}$$ Tương tự ta có: $$\frac{b+1}{1+c^2}\ge b+1-\frac{bc+c}{2}\quad(2)$$ $$\frac{c+1}{1+a^2}\ge c+1-\frac{ca+a}{2}\quad(3)$$	0,5
	Cộng vế theo vế (1), (2) và (3) ta được: $$\frac{a+1}{1+b^2}+\frac{b+1}{1+c^2}+\frac{c+1}{1+a^2}\ge 3+\frac{a+b+c-ab-bc-ca}{2}\quad(*)$$	0,5
	Mặt khác: $3(ab+bc+ca)\le\left(a+b+c\right)^2=9\Rightarrow\frac{a+b+c-ab-bc-ca}{2}\ge 0$ Nên (*) $\Leftrightarrow\frac{a+1}{1+b^2}+\frac{b+1}{1+c^2}+\frac{c+1}{1+a^2}\ge 3$ (đpcm) Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$	0,5

---------------**HẾT**--------------

Lưu ý: - Các cách giải đúng khác cho điểm tương đương với biểu điểm

- Điểm toàn bài không làm tròn