SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BÌNH DƯƠNG

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THCS CẤP TỈNH
Năm học: 2012-2013

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn Toán lớp 9
Thời gian làm bài: 150 phút
(Không kể thời gian chép đề)

Câu 1: (4 điểm)

1. Chứng minh rằng $n^6 - n^4 - n^2 + 1$ chia hết cho 128 với n là số tự nhiên lẻ.
2. Trong phép chia a cho b (a,b là các số tự nhiên), nếu tăng số chia b cho một đơn vị thì thương số không thay đổi trong trường hợp nào ?

Câu 2: (4 điểm)

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 - y^2 + xy = 1 \\ 3x + y = y^2 + 3 \end{cases}$

Câu 3: (4 điểm)

Cho phương trình $x^2 + px + p = 0$ (1)

Tìm p, q để phương trình (1) có 2 nghiệm, mặt khác khi thêm 1 vào các nghiệm của (1) thì chúng trở thành nghiệm của phương trình $x^2 - p^2x + pq = 0$

Câu 4: (4 điểm)

Cho tam giác ABC, có AB < AC, kẻ trung tuyến AM, đường cao AH và phân giác AD.

1. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho AE = AB, Chứng minh $\widehat{DEC} > \widehat{ACB}$.
2. Chứng minh CD > CM .
3. Chứng minh rằng điểm D nằm giữa 2 điểm H và M .

Câu 5: (4 điểm)

Cho góc nhọn $\widehat{xMy}$ và điểm A cố định (khác M) thuộc tia Mx. Vẽ đường tròn (O), tâm O sao cho tiếp xúc với Mx tại A và cắt My tại B, C theo thứ tự M, B, C.

1. Gọi D là trung điểm cung BC không chứa A của (O), E là giao đểm của AD và BC. Chứng minh rằng E là điểm cố định khi đường tròn (O) thay đổi .
2. Gọi H là chân đường cao AH của tam giác AOM. Chứng minh rằng tứ giác BHOC nội tiếp đường tròn.

----------------------hết---------------------

Giải đề thi

Câu 1: (4 điểm)

1. Chứng minh rằng $n^6 - n^4 - n^2 + 1$ chia hết cho 128 với n là số tự nhiên lẻ.

Ta có: $n^6 - n^4 - n^2 + 1 = n^4(n^2 - 1) - (n^2 - 1) = (n^2 - 1)(n^4 - 1) = (n^2 - 1)^2(n^2 + 1)$

Vì n lẻ , đặt $n = 2k + 1$ với k là số tự nhiên.

Khi đó: $(n^2 - 1) = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1)$ chia hết cho 4

Mặt khác: $k(k + 1)$ chia hết cho 2

$\Rightarrow (n^2 - 1)^2$ chia hết cho $(4.2)^2 = 64$ (1)

Ta có: $(n^2 + 1) = 4k^2 + 4k + 2 = 2(2k^2 + 2k + 1)$ thì chia hết cho 2 (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow n^6 - n^4 - n^2 + 1$ chia hết cho $64.2 = 128$

2. Trong phép chia a cho b (a,b là các số tự nhiên), nếu tăng số chia b cho một đơn vị thì thương số không thay đổi trong trường hợp nào ?

Gọi q, r là thương và số dư của phép chia a cho b.

Ta có: $a = p.q + r$, 0 , $0 \le r \le b$

Ta có thể viết: $a = (b+1)q - q + r$

Nếu q là thương của a chia cho b + 1 thì phải có điều kiện $0 \le r-q < b+1$

$\Rightarrow q \le r < q+b+1$ là hiển nhiên

Vậy chỉ cần điều kiện $q \le r$

Câu 2: (4 điểm)

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 - y^2 + xy = 1 \\ 3x + y = y^2 + 3 \end{cases}$ (*)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = x^2 + xy - 1 \\ y^2 = 3x + y - 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + xy - 1 = 3x + y - 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + xy - x - y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y(x-1) - (x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+y-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x + y - 2 = 0 \end{array}\right.$$

+ Với x=1: (*) trở thành: $\begin{cases} x = 1 \\ 3x + y = y^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0; y = 1 \end{cases}$

+ Với $x + y - 2 = 0$: (*) trở thành: $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 3x + y = y^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ 3(2-y) + y = y^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \Rightarrow x = 1 \\ y = -3 \Rightarrow x = 5 \end{array}\right.$

Vậy hệ PT đã cho có 3 nghiệm: (1;0); (1;1); (5;-3)

Câu 3: (4 điểm)

Cho phương trình $x^2 + px + q = 0$ (1)

Tìm p, q để phương trình (1) có 2 nghiệm, mặt khác khi thêm 1 vào các nghiệm của (1) thì chúng trở thành nghiệm của phương trình $x^2 - p^2x + pq = 0$

Gọi x_1; x_2 là 2 nghiệm của PT (1)

(1) có 2 nghiệm khi và chỉ khi $p^2 - 4p \geq 0$

Ta có: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 . x_2 = q$

Khi thêm 1 vào các nghiệm x_1; x_2 , ta được:

$x_1 + 1 + x_2 + 1 = x_1 + x_2 + 2 = -p + 2$

$(x_1+1)(x_2+1) = x_1.x_2 + x_1 + x_2 + 1 = q - p + 1$

Vậy: $x_1 + 1$ và $x_2 + 1$ là 2 nghiệm của PT: $x^2 + (p-2)x + q - p + 1 = 0$

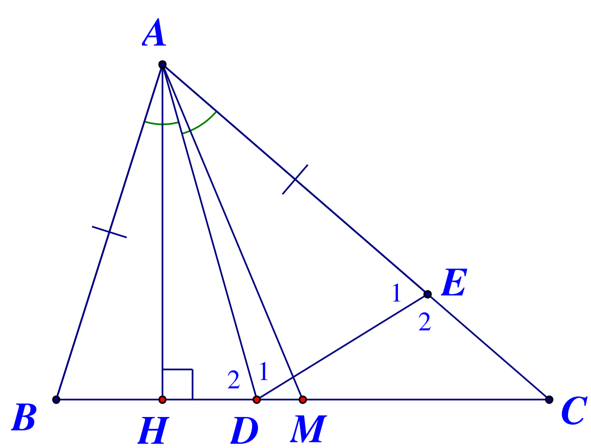
Theo đầu bài ta có: $\begin{cases} p-2=-p^2 \\ q-p+1=pq \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p-2=-p^2 \\ (q+1)(p-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=1 \\ q \text{ tuy } y \end{cases}$ hoac $\begin{cases} p=-2 \\ q=-1 \end{cases}$

+TH 1: $\begin{cases} p=1 \\ q \text{ tuy } y \end{cases}$ và $p^2 - 4p \geq 0$ ta suy ra $q \leq \frac{1}{4}$

+TH 2: $\begin{cases} p=-2 \\ q=-1 \end{cases}$ thoả mãn $p^2 - 4p \geq 0$

Vậy p, q cần tìm là $\begin{cases} p=1 \\ q \leq \frac{1}{4} \end{cases}$ hoặc: $\begin{cases} p=-2 \\ q=-1 \end{cases}$

Câu 4: (4 điểm)



1) Ta có: $\Delta ABD = \Delta AED$ (c-g-c)

$\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{E_1}$, $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$ và DB = DE (1)

Vì $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{E_1} + \widehat{E_2} = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{E_2} = \widehat{A} + \widehat{C}$

$\Rightarrow \widehat{E_2} > \widehat{C}$

2) Vì $\widehat{E_2} > \widehat{C}$ (câu 1)

$\Rightarrow$ CD > DE

Mà DB = DE (1)

Nên: CD > DB

Lại có MB = MC (M là trung điểm BC)

$\Rightarrow$ CD > CM

3) Ta có: $\widehat{ADC} > \widehat{ADE}$ (vì E $\in$ AC)

Và $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$

Nên: $\widehat{ADC} > \widehat{ADB}$

$\Rightarrow \widehat{ADC}$ là góc tù

$\Rightarrow$ CH > CD (đường cao nằm ngoài tam giác)

Mà CD > CM (câu 3)
Nên D nằm giữa H và M

Câu 5: (4 điểm)

1) Ta có $\widehat{MAE} = \frac{1}{2} sd \overset{\frown}{AD}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

2) $\widehat{MEA} = \frac{1}{2} sd\left(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}\right)$ (góc có đỉnh ở trong đường tròn) (a)

$\Rightarrow \widehat{MEA} = \frac{1}{2} sd\left(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BD}\right) = \frac{1}{2} sd \overset{\frown}{AD}$ (D là trung điểm cung BC) (b)

Từ (a) và (b) $\Rightarrow \widehat{MEA} = \widehat{MAE}$

$\Rightarrow$ ΔMAE cân tại M

$\Rightarrow$ MA = ME không đổi

$\Rightarrow$ E là điểm cố định .

2)

Xét ΔMAB và ΔMCA có:

$\widehat{M}$: chung

$\widehat{MAB} = \widehat{MCA}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây, góc nội tiếp cùng chắn 1 cung)

$\Rightarrow$ΔMAB ~ ΔMCA (g-g)

$\Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MB}{MA} \Rightarrow MA^2 = MB.MC$

Mà $MA^2 = MH.MO$ (ΔAMO vuông tại A, đường cao AH)

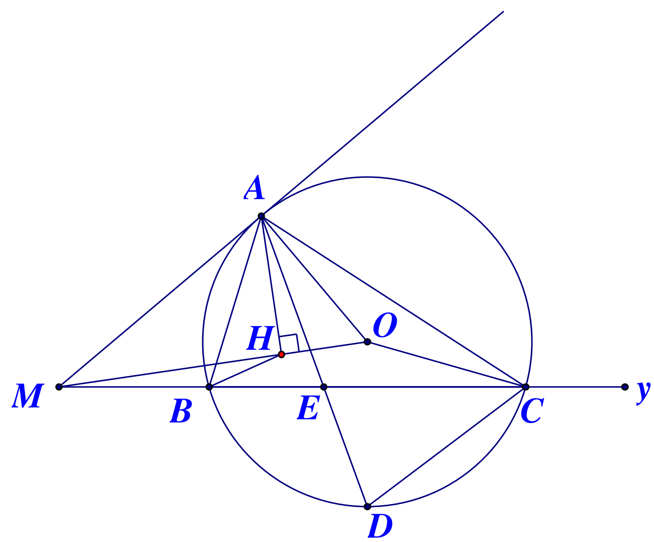
Nên: MB.MC = MH.MO

$\Rightarrow \frac{MH}{MB} = \frac{MC}{MO}$

$\Rightarrow$ ΔMBH ~ ΔMOC

$\Rightarrow \widehat{MHB} = \widehat{MCO}$

$\Rightarrow$ Tứ giác BHOM nội tiếp(góc ngoài bằng góc trong đối diện)



-------Hết-------