HD GIẢI DẠNG TOÁN NÂNG CAO CHO HS LỚP 7

DẠNG DÃY SỐ LÀ CÁC PHÂN SỐ:

Bài 1. Tính giá trị của biểu thức A = $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{(n-1).n}$

Nhận xét: Ta thấy các giá trị ở tử không thay đổi và chúng và đúng bằng hiệu hai thừa số ở mẫu. Mỗi số hạng đều có dạng:

$\frac{m}{b(b+m)}=\frac{1}{b}-\frac{1}{b+m}$ (Hiệu hai thừa số ở mẫu luôn bằng giá trị ở tử thì phân số đó luôn viết được dưới dạng hiệu của hai phân số khác với các mẫu tương ứng).

Nếu ta có một tổng với các đặc điểm: các số hạng liên tiếp luôn đối nhau (số trừ của nhóm trước bằng số bị trừ của nhóm sau liên tiếp), cứ như vậy các số hạng trong tổng đều được khử liên tiếp, đến khi trong tổng chỉ còn số hạng đầu và số hạng cuối, lúc đó ta thực hiện phép tính sẽ đơn giản hơn.

Lời giải

Ta có: A = $\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$ sau khi bỏ dấu ngoặc ta có:

A = $1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}$

Bài 2. Tính giá trị của biểu thức B = $\frac{4}{3.7}+\frac{4}{7.11}+\frac{4}{11.15}+...+\frac{4}{95.99}$

B = $\left(\frac{4}{3.7}+\frac{4}{7.11}+\frac{4}{11.15}+...+\frac{4}{95.99}\right)$ vận dụng cách làm của phần nhận xét, ta có: 7 - 3 = 4 (đúng bằng tử) nên ta có:

B = $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{15}+...+\frac{1}{95}-\frac{1}{99}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{99}=\frac{32}{99}$

Bài 3. Tính giá trị của biểu thức C = $\frac{7^2}{2.9}+\frac{7^2}{9.16}+\frac{7^2}{16.23}+...+\frac{7^2}{65.72}$

Nhận xét: Ta thấy: 9 - 2 = 7 $\neq 7^2$ ở tử nên ta không thể áp dụng cách làm của các bài trên (ở tử đều chứa 7^2), nếu giữ nguyên các phân số đó thì ta không thể tách được thành hiệu các phân số khác để rút gọn tổng trên được. Mặt khác ta thấy: $\frac{7}{2.9}=\frac{1}{2}-\frac{1}{9}$, vì vậy để giải quyết được vấn đề ta phải đặt 7 làm thừa số chung ra ngoài dấu ngoặc, khi đó thực hiện bên trong ngoặc sẽ đơn giản.

Vậy ta có thể biến đổi:

$$C = 7.\left(\frac{7}{2.9}+\frac{7}{9.16}+\frac{7}{16.23}+...+\frac{7}{65.72}\right) = 7.\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}-\frac{1}{23}+...+\frac{1}{65}-\frac{1}{72}\right)=$$

$$= 7.\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{72}\right)=7.\frac{35}{72}=3\frac{29}{72}$$

<u>Bài 4</u>. Tính giá trị của biểu thức $D = \frac{3}{1.3}+\frac{3}{3.5}+\frac{3}{5.7}+...+\frac{3}{49.51}$

Lời giải

Ta lại thấy: 3 - 1 = 2 $\neq$ 3 ở tử của mỗi phân số trong tổng nên bằng cách nào đó ta đưa 3 ra ngoài và đưa 2 vào trong thay thế.

Ta có: $D = \frac{2}{2}\left(\frac{3}{1.3}+\frac{3}{3.5}+\frac{3}{5.7}+...+\frac{3}{49.51}\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{2}{1.3}+\frac{2}{3.5}+\frac{2}{5.7}+...+\frac{2}{49.51}\right)$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+\frac{1}{49}-\frac{1}{51}\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{51}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{50}{51}=\frac{25}{17}$$

<u>Bài 5</u>. Tính giá trị của biểu thức $E = \frac{1}{7}+\frac{1}{91}+\frac{1}{247}+\frac{1}{475}+\frac{1}{775}+\frac{1}{1147}$

Lời giải

Ta thấy: 7 = 1.7 ; 91 = 13.7 ; 247 = 13.19 ; 475 = 19.25

775 = 25.31 ; 1147 = 31.37

Tương tự bài tập trên ta có:

$$E = \frac{1}{6}\left(\frac{6}{1.7}+\frac{6}{7.13}+\frac{6}{13.19}+\frac{6}{19.25}+\frac{6}{25.31}+\frac{6}{31.37}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{13}+\frac{1}{13}-\frac{1}{19}+\frac{1}{19}-\frac{1}{25}+\frac{1}{25}-\frac{1}{31}+\frac{1}{31}-\frac{1}{37}\right)=\frac{1}{6}\cdot\left(1-\frac{1}{37}\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{36}{37}=\frac{6}{37}$$

Bài 6. *(Đề thi chọn HSG Toán 6 - TX Hà Đông - Hà Tây - Năm học 2002 - 2003)*

So sánh: $A=\frac{2}{60.63}+\frac{2}{63.66}+...+\frac{2}{117.120}+\frac{2}{2003}$ và

$$B=\frac{5}{40.44}+\frac{5}{44.48}+...+\frac{5}{76.80}+\frac{5}{2003}$$

Lời giải

Lại áp dụng cách làm ở bài trên ta có:

$$A=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{60.63}+\frac{3}{63.66}+...+\frac{3}{117.120}\right)+\frac{2}{2003}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{60}-\frac{1}{63}+\frac{1}{63}-\frac{1}{66}+...+\frac{1}{117}-\frac{1}{200}\right)+\frac{2}{2003}$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{60}-\frac{1}{120}\right)+\frac{2}{2003}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{120}+\frac{2}{2003}=\frac{1}{180}+\frac{2}{2003}$$

Tương tự cách làm trên ta có:

$$B=\frac{5}{4}\left(\frac{1}{40}-\frac{1}{80}\right)+\frac{5}{2003}=\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{80}+\frac{5}{2003}=\frac{1}{64}+\frac{5}{2003}$$

Ta lại có: $2A=2\left(\frac{1}{180}+\frac{2}{2003}\right)=\frac{2}{180}+\frac{4}{2003}=\frac{1}{90}+\frac{4}{2003}$

➔Từ đây ta thấy ngay $B > 2A$ thì hiển nhiên $B > A$

Bài 7. *(Đề thi chọn HSG Toán năm học 1985 - 1986)*

So sánh hai biểu thức A và B:

$$A=124\left(\frac{1}{1.1985}+\frac{1}{2.1986}+\frac{1}{3.1987}+...+\frac{1}{16.2000}\right)$$

$$B=\frac{1}{1.17}+\frac{1}{2.18}+\frac{1}{3.19}+...+\frac{1}{1984.2000}$$

Lời giải

Ta có: A = $\frac{124}{1984}.\left(1-\frac{1}{1985}+\frac{1}{2}-\frac{1}{1986}+\frac{1}{3}-\frac{1}{1987}+...+\frac{1}{16}-\frac{1}{2000}\right)=$

$$=\frac{1}{16}.\left[\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{16}\right)-\left(\frac{1}{1985}+\frac{1}{1986}+...+\frac{1}{2000}\right)\right]$$

Còn

$$B=\frac{1}{16}.\left[\left(1-\frac{1}{17}+\frac{1}{2}-\frac{1}{18}+...+\frac{1}{1984}-\frac{1}{2000}\right)\right]=\frac{1}{16}.\left[\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{1984}\right)-\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+...+\frac{1}{2000}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{16}.\left[\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+...+\frac{1}{1984}-\frac{1}{17}-\frac{1}{18}-...-\frac{1}{1984}\right)-\left(\frac{1}{1985}+...+\frac{1}{2000}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{16}\left[\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{16}\right)-\left(\frac{1}{1985}+\frac{1}{1986}+...+\frac{1}{2000}\right)\right]$$

➔ Vậy A = B

<u>Bài 8</u>. Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{25}+...+\frac{1}{n^2+(n+1)^2}<\frac{1}{2}$ với mọi n $\in$ N

Lời giải

Ta không thể áp dụng ngay cách làm của các bài tập trên, mà ta thấy:

$\frac{1}{5}<\frac{2}{2.4};\frac{1}{13}<\frac{2}{4.6};\frac{1}{25}<\frac{2}{6.8}.....;$

ta phải so sánh: $\frac{1}{n^2+(n+1)^2}$ với: $\frac{2}{2n(2n+1)}$

Thật vậy: $\frac{1}{n^2+(n+1)^2}=\frac{1}{2n^2+2n+1}$ còn $\frac{2}{2n(2n+2)}=\frac{1}{n(2n+2)}=\frac{1}{2n^2+2n}$

nên hiển nhiên $\frac{1}{n^2+(n+1)^2}<\frac{2}{2n(2n+1)}$ $\forall n\in N$.

Vậy ta có: $\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{25}+...+\frac{1}{n^2+(n+1)^2}<\frac{2}{2.4}+\frac{2}{4.6}+\frac{2}{6.8}+...+\frac{2}{2n(2n+2)}$

Mà: $\frac{2}{2.4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4};\frac{2}{4.6}=\frac{1}{4}-\frac{1}{6};\frac{2}{6.8}=\frac{1}{6}-\frac{1}{8}...\frac{2}{2n(2n+2)}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}$ nên:

$$\frac{2}{2.4}+\frac{2}{4.6}+\frac{2}{6.8}+...+\frac{2}{2n(2n+2)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}...+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+2}<\frac{1}{2}$$

là hiển nhiên với mọi số tự nhiên n

Vậy: $\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{25}+...+\frac{1}{n^2+(n+1)^2}<\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}...+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}$

Hay $\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{25}+...+\frac{1}{n^2+(n+1)^2}<\frac{1}{2}$

<u>Bài 9</u>. Tính giá trị của biểu thức $M=\frac{3}{(1.2)^2}+\frac{5}{(2.3)^2}+...+\frac{2n+1}{[n(n+1)]^2}$

Lời giải

Ta có ngay:

$$M=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}$$

$$=\frac{(n+1)(n+1)-1}{(n+1)^2}=\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}=\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

<u>Bài 10</u>. Tính giá trị của biểu thức $N=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Lời giải

Ta có: $N=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{1.2.3}+\frac{2}{2.3.4}+\frac{2}{3.4.5}+...+\frac{2}{n.(n+1)(n+2)}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}+\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}+...+\frac{1}{n.(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

Bài 11. Tính giá trị của biểu thức: $H=\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+...+\frac{1}{(n-1).n(n+1)(n+2)}$

Lời giải

Ta có: $H=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{1.2.3.4}+\frac{3}{2.3.4.5}+...+\frac{3}{(n-1).n.(n+1).(n+2)}\right)$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{2.3.4}-\frac{1}{3.4.5}+...+\frac{1}{(n-1).n.(n+1)}-\frac{1}{n.(n+1).(n+2)}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$$

Bài 12. Chứng minh rằng P = $\frac{12}{1.4.7}+\frac{12}{4.7.10}+\frac{12}{7.10.12}+...+\frac{12}{54.57.60}<\frac{1}{2}$

Lời giải

Ta có: P = $2.\left(\frac{6}{1.4.7}+\frac{6}{4.7.10}+\frac{6}{7.10.13}+...+\frac{6}{54.57.60}\right)$

$= 2.\left(\frac{1}{1.4}-\frac{1}{4.7}+\frac{1}{4.7}-\frac{1}{7.10}+\frac{1}{7.10}-\frac{1}{10.13}+...+\frac{1}{54.57}-\frac{1}{57.60}\right)=$

$= 2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{57.60}\right)=2\cdot\frac{854}{3420}=\frac{427}{855}<\frac{427}{854}=\frac{1}{2}$. Vậy P < $\frac{1}{2}$

Bài 13. Chứng minh rằng S = $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{100^2}<2$

Lời giải

Ta thấy: $\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1.2};\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2.3};\frac{1}{4^2}<\frac{1}{3.4}...\frac{1}{100^2}<\frac{1}{99.100}$ Áp dụng cách làm bài tập trên ta có:

S < $1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{99.100}<1+1-\frac{1}{100}<2$ hay S < 2

Bài 14. Cho $A=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{2005.2006}$

$B=\frac{1}{1004.2006}+\frac{1}{1005.2006}+...+\frac{1}{2006.1004}$. Chứng minh rằng $\frac{A}{B}\in Z$

Lời giải

Áp dụng các bài trên, ta có:

$A=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{2005.2006}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2005}-\frac{1}{2006}=$

$=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2005}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{2006}\right)=$

$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2006}\right)-2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2006}\right)=$

$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2006}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{1003}\right)=\frac{1}{1004}+\frac{1}{1005}+...+\frac{1}{2006}$

Còn B = $\frac{2}{3010}\left(\frac{1}{1004}+\frac{1}{1005}+...+\frac{1}{2006}\right)\Rightarrow\frac{A}{B}=\frac{3010}{2}=1505\in Z$

Như vậy, ở phần này ta đã giải quyết được một lượng lớn các bài tập về dãy số ở dạng phân số. Tuy nhiên đó là các bài tập nhìn chung không hề đơn giản. Vì vậy để áp dụng có hiệu quả thì chúng ta cần linh hoạt trong việc biến đổi theo các hướng sau:

1 - Nếu mẫu là một tích thì bằng mọi cách biến đổi thành hiệu các phân số, từ đó ta rút gọn được biểu thức rồi tính được giá trị.

2 - Đối với các bài tập chứng minh ta cũng có thể áp dụng cách làm về tính giá trị của dãy số, từ đó ta có thể biến đổi biểu thức cần chứng minh về dạng quen thuộc