I/KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I./CÁC CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC

1.CÔNG THỨC CỘNG

$\cos(a + b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$

$\cos(a - b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$

$\sin(a + b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b$

$\sin(a - b) = \sin a.\cos b - \cos a.\sin b$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b}$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a.\tan b}$$

2.CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

$= 2\cos^2 a - 1$

$= 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2.\sin a.\cos a$

$$\tan 2a = \frac{2.\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

3.CÔNG THỨC HẠ BẬC

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

4.CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TỔNG THÀNH TÍCH

$$\cos a + \cos b = 2.\cos\frac{a + b}{2}.\cos\frac{a - b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2.\sin\frac{a + b}{2}.\sin\frac{a - b}{2}$$

$$\sin a + \sin b = 2.\sin\frac{a + b}{2}.\cos\frac{a - b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2.\cos\frac{a + b}{2}.\sin\frac{a - b}{2}$$

$$\tan a + \tan b = \frac{\sin(a + b)}{\cos a \cos b}$$

$$\tan a - \tan b = \frac{\sin(a - b)}{\cos a \cos b}$$

5.CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG

$$\cos a.\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) + \cos(a + b)]$$

$$\sin a.\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a + b) + \sin(a - b)\right]$$

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}\left[\sin(a + b) - \sin(a - b)\right]$$

II/Các hằng đẳng thức lượng giác cơ bản :

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (với $\forall x \neq k\pi$, $k \in Z$)
- $\cot^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ (với $\forall x \neq k\pi$, $k \in Z$)

* $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (với $\forall\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$)

* $\tan^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ (với $\forall\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$)

- $\tan\alpha\cot\alpha = 1$ (với $\forall\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$,k $\in$ Z)

Cung hơn kém k2π và kπ :

- $\sin(x+k2\pi) = \sin x$ $\qquad$ $\cos(x+k2\pi) = \cos x$
- $\tan(x+k\pi) = \tan x$ $\qquad$ $\cot(x+k\pi) = \cot x$

Cung đối :

- $\sin(-x) = -\sin x$ $\qquad$ $\cos(-x) = \cos x$
- $\tan(-x) = -\tan x$ $\qquad$ $\cot(-x) = -\cot x$

Cung bù :

- $\sin(\pi-x) = \sin x$ $\qquad$ $\cos(\pi-x) = -\cos x$
- $\tan(\pi-x) = -\tan x$ $\qquad$ $\cot(\pi-x) = -\cot x$

Cung phụ :

- $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cot x$ $\qquad$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \tan x$

Cung hơn kém π/2 :

- $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\cot x$ $\qquad$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\tan x$

Cung hơn kém π :

- $\sin(\pi+x) = -\sin x$ $\qquad$ $\cos(\pi+x) = -\cos x$
- $\tan(\pi+x) = \tan x$ $\qquad$ $\cot(\pi+x) = \cot x$

Công thức chia đôi :

- $\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ $\qquad$ $\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$
- $\tan\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$

Công thức nhân ba :

- $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$
- $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

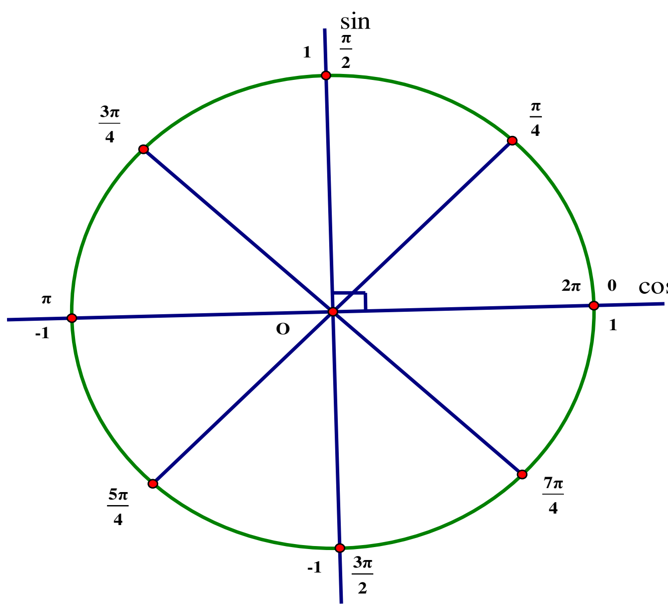
- $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}\left(\forall x, 3x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$
- $\cot 3x = \dfrac{\cot^3 x - 3\cot x}{3\cot^2 x - 1}\left(\forall x, 3x \neq k\pi\right)$

Công thức hạ bậc :

- $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ $\qquad \cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
- $\tan^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}\left(\forall x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$ $\qquad \cot^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{1 - \sin 2x}\left(\forall x \neq k\pi\right)$
- $\sin^3 x = \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$ $\qquad \cos^3 x = \dfrac{3\cos x + \cos 3x}{4}$

Công thức theo $t = \tan\dfrac{x}{2}$ **:**

- $\sin x = \dfrac{2t}{1 + t^2}$ $\qquad \cos x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$ $\qquad \tan x = \dfrac{2t}{1 - t^2}\left(\forall x, \dfrac{x}{2} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$



6.BẢNG GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC CUNG ĐẶC BIỆT

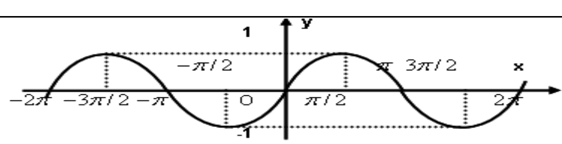
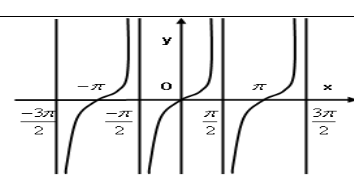
x	rad	-π	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
	độ	-180^o	-150^o	-135^o	-120^o	-90^o	-60^o	-45^o	-30^o	0	30^o	45^o	60^o	90^o	120^o	135^o	150^o	180^o
sin		0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

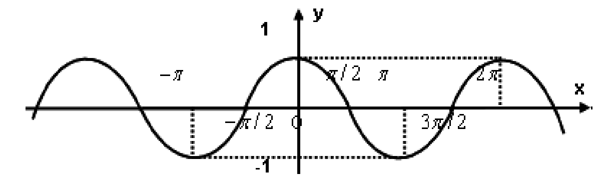
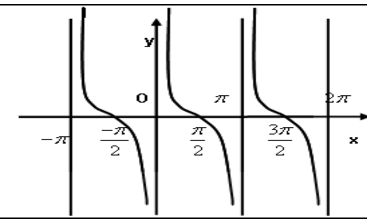
cos	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	‖	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	‖	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
cot	‖	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	‖	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	‖

KIẾN THỨC CƠ BẢN

<table>
<tr><th></th><th>y = sinx</th><th>y = cosx</th><th>y = tanx</th><th>y = cotx</th></tr>
<tr><td>Tập xác định</td><td>D = R</td><td>D = R</td><td>$D = R \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$</td><td>$D = R \setminus \{k\pi\}$</td></tr>
<tr><td>Tập giá trị</td><td>T = [– 1 ; 1]</td><td>T = [– 1 ; 1]</td><td>R</td><td>R</td></tr>
<tr><td>Chu kỳ</td><td>T = 2π</td><td>T = 2π</td><td>T = π</td><td>T = π</td></tr>
<tr><td>Tính chẵn lẻ</td><td>Lẻ</td><td>Chẵn</td><td>Lẻ</td><td>Lẻ</td></tr>
<tr><td>Sự biến thiên</td><td>Đồng biến trên:
$\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi\,;\,\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)$
Nghịch biến trên:
$\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi\,;\,\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$</td><td>Đồng biến trên:
$\left(-\pi+k2\pi\,;\,k2\pi\right)$
Nghịch biến trên:
$\left(k2\pi\,;\,\pi+k2\pi\right)$</td><td>Đồng biến trên mỗi khoảng:
$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$</td><td>Nghịch biến trên mỗi khoảng: $\left(k\pi\,;\,\pi+k\pi\right)$</td></tr>
<tr><td>Bảng biến thiên</td><td colspan="2">$\begin{array}{c|ccccccccc} x & -\pi & & -\frac{\pi}{2} & & 0 & & \frac{\pi}{2} & & \pi \\ \hline y=\sin x & 0 & \searrow & -1 & \nearrow & 0 & \nearrow & 1 & \searrow & 0 \end{array}$

$\begin{array}{c|ccccc} x & -\pi & & 0 & & \pi \\ \hline y=\cos x & -1 & \nearrow & 1 & \searrow & -1 \end{array}$</td><td colspan="2">$\begin{array}{c|ccc} x & -\frac{\pi}{2} & & \frac{\pi}{2} \\ \hline y=\tan x & -\infty & \nearrow & +\infty \end{array}$

$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & & \pi \\ \hline y=\cot x & +\infty & \searrow & -\infty \end{array}$</td></tr>
<tr><td>Đồ thị</td><td colspan="2">
y = sinx
....
y = cosx</td><td colspan="2">
y = tanx
....
y = cotx</td></tr>
</table>

II.CÁC PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP

1.Phương trình sinx=a.($-1\le a\le 1$)

$\sin x = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\arcsin a+k2\pi \\ x=\pi-\arcsin a+k2\pi \end{array}\right.;\ k\in Z$ $\quad +\sin x=\sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+k2\pi \\ x=\pi-\alpha+k2\pi \end{array}\right.;\ k\in Z\ (a=\sin\alpha)$

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi;\ k\in Z$

$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}+k2\pi;\ k\in Z$

$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2}+k2\pi;\ k\in Z$

2.Phương trình cosx=a.($-1\le a\le 1$)

$\cos x = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\arccos a+k2\pi \\ x=-\arccos a+k2\pi \end{array}\right.;\ k\in Z$ $\quad +\cos x=\cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+k2\pi \\ x=-\alpha+k2\pi \end{array}\right.;\ k\in Z\ (a=\cos\alpha)$

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}+k\pi;\ k\in Z$

$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi;\ k\in Z$

$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi+k2\pi;\ k\in Z$

3.Phương trình tanx=a.

TXĐ: $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

$+\tan x=a \Leftrightarrow x=\arctan a+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ $\qquad +\tan x=\tan\alpha \Leftrightarrow x=\alpha+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

$\tan x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

$\tan x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

$\tan x=0 \Leftrightarrow x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$

4.Phương trình cotx=a.

TXĐ: $\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

$+\cot x=a \Leftrightarrow x=\operatorname{arccot} a+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ $\qquad +\cot x=\cot\alpha \Leftrightarrow x=\alpha+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

$\cot x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in \mathbb{Z}$

$\cot x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in \mathbb{Z}$

$\cot x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in \mathbb{Z}$

III.CÁC PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP.

1.Phương trình a.sinx+bcosx=c ($a^2+b^2\neq 0$)

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

đặt: $\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}$

phương trình trở thành: $\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$\Leftrightarrow \sin(x+\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Chú ý

+Phương trình có nghiệm khi $c^2\le a^2+b^2$

+Nếu $a.b\neq 0, c=0$ thì: $a\sin x+b\cos x=0 \Leftrightarrow \tan x=-\frac{b}{a}$

2.Phương trình : $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$ **(1)**

+Nếu a = 0: $b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$

$$\Leftrightarrow \cos x(b\sin x+c\cos x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ b\sin x+c\cos x=0\end{array}\right.$$

+Nếu c = 0: $a\sin^2 x+b\sin x\cos x=0$

$$\Leftrightarrow \sin x(a\sin x+b\cos x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ a\sin x+b\cos x=0\end{array}\right.$$

+Nếu $a\neq 0, c\neq 0, \cos x\neq 0$: (1) $\Leftrightarrow a\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+b\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x}+c\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}=0$

$$\Leftrightarrow a\tan^2 x+b\tan x+c=0$$

IV /Các kết quả thường dùng :

- $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$
- $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$
- $\tan x+\cot x=-2\cot 2x\left(\forall x\neq k\frac{\pi}{2}\right)$

- $\tan x - \cot x = \dfrac{2}{\sin 2x}\left(\forall x \neq k\dfrac{\pi}{2}\right)$
- $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\cos 4x$
- $\sin^6 x + \cos^6 x = \dfrac{5}{8} + \dfrac{3}{8}\cos 4x$
- $1 + \sin x = 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)$
- $1 - \sin x = 2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)$
- $1 + \tan x = \dfrac{\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos x}$ $\quad 1 - \tan x = \dfrac{\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)}{\cos x}$

V/ Các hằng đẳng thức trong tam giác :

- $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$
- $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$
- $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$
- $\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$
- $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$
- $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A \cos B \cos C$
- $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \sin B \sin C$
- $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A \cos B \cos C$
- $\cot\dfrac{A}{2} + \cot\dfrac{B}{2} + \cot\dfrac{C}{2} = \cot\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{B}{2}\cot\dfrac{C}{2}$
- $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2} + \tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2} = 1$

VI/Các phương trình lượng giác thường gặp :

Các họ nghiệm cơ bản :

- $\sin u = \sin v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{array}\right.$ $\quad \cos u = \cos v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{array}\right. (\forall k \in \mathbb{Z})$
- $\tan u = \tan v \Leftrightarrow \begin{cases} v \neq \dfrac{\pi}{2} + l\pi \\ u = v + k\pi \end{cases} (\forall k, l \in \mathbb{Z})$ $\quad \cot u = \cot v \Leftrightarrow \begin{cases} v \neq l\pi \\ u = v + k\pi \end{cases} (\forall k, l \in \mathbb{Z})$

1/Phương trình bậc nhất theo một hàm số lượng giác của u :

Có dạng: $\left|\begin{array}{l} a\sin u+b=0 \\ a\cos u+b=0 \\ a\tan u+b=0 \\ a\cot u+b=0 \end{array}\right.;a\neq 0\to \left|\begin{array}{l} \sin u=\frac{-b}{a}(1) \\ \cos u=\frac{-b}{a}(2) \\ \tan u=\frac{-b}{a}(3) \\ \cot u=\frac{-b}{a}(4) \end{array}\right.$

Đối với các phương trình (1) và (2) cần có thêm điều kiện $\left|\frac{-b}{a}\right|\leq 1$

Chọn α sao cho $\left|\begin{array}{l} \sin\alpha=\frac{-b}{a};\alpha\in\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\ \cos\alpha=\frac{-b}{a};\alpha\in[0;\pi] \\ \tan\alpha=\frac{-b}{a};\alpha\in\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\ \cot\alpha=\frac{-b}{a};\alpha\in[0;\pi] \end{array}\right.$ ⇒ đưa về các họ nghiệm cơ bản để giải.

1.
2. **Phương trình bậc hai theo một hàm số lượng giác của u :**

Có dạng: $\left|\begin{array}{l} a\sin^2 u+b\sin u+c=0 \\ a\cos^2 u+b\cos u+c=0 \\ a\tan^2 u+b\tan u+c=0 \\ a\cot^2 u+b\tan u+c=0 \end{array}\right.;a\neq 0$. Đặt $\left|\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\sin u=t \\ \cos u=t\end{array}\right\}|t|\leq 1 \\ \tan u=t \\ \cot u=t \end{array}\right.$

⇒ Phương trình bậc hai $at^2 + bt + c = 0$

Giải phương trình tìm t (xét điều kiện nếu có) ⇒ các họ nghiệm cơ bản, giải tìm x

3. **Các dạng khác :**

Dạng của phương trình	Phương pháp giải
Dạng 1 : Phương trình bậc nhất hoặc bậc hai đối với f(x),trong đó f(x) là một biểu thức lượng giác nào đó.	Đặt ẩn phụ t = f(x).
Dạng 2 : Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$.	**Cách 1 :** Biến đổi vế trái về dạng $C\sin(x+\alpha)$ với $C=\sqrt{a^2+b^2}$,α là số thực sao cho $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ và $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **Cách 2 :**

	• Tìm nghiệm thỏa $\cos\frac{x}{2}=0$. • Với $\cos\frac{x}{2}\neq 0$ thì đặt $t=\tan\frac{x}{2}$ ta có: $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.Đưa phương trình đã cho thành phương trình bậc hai theo ẩn t.
Dạng 3 : Phương trình đối xứng với $\sin x$ và $\cos x$: • $a(\sin x+\cos x)+b\sin x\cos x+c=0$ • $a(\sin x-\cos x)+b\sin x\cos x+c=0$	Đặt $t=\sin x\pm\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x\pm\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ thì $\sin x\cos x=\pm\left(\frac{t^2-1}{2}\right)$
Dạng 4 : Phương trình thuần bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$: $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$ Với $a^2+b^2+c^2\neq 0$	**Cách 1 :** • Tìm nghiệm thỏa $\cos x=0$. • Với $\cos x\neq 0$ thì chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ để đưa phương trình đã cho về dạng phương trình bậc hai theo ẩn $\tan x$. **Cách 2 :** • Tìm nghiệm thỏa $\sin x=0$ • Với $\sin x\neq 0$ thì chia hai vế của phương trình cho $\sin^2 x$ để đưa phương trình đã cho về dạng phương trình bậc hai theo ẩn $\cot x$.
Dạng 5 : Phương trình thuần bậc ba đối với $\sin x$ và $\cos x$: $a\sin^3 x+b\cos^3 x+c\sin^2 x\cos x+d\sin x\cos^2 x$ $+e\sin x+f\cos x=0$	Cách giải tương tự như phương trình thuần nhất bậc hai nhưng chia hai vế cho $\cos^3 x$ hoặc $\sin^3 x$ và chú ý áp dụng các hằng đẳng thức lượng giác cơ bản.

4. **Kết hợp công thức nghiệm :**

Kết hợp công thức nghiệm trong các PTLG chẳng những giúp cho ta có thể loại được nghiệm ngoại lai mà còn có thể có được một công thức nghiệm đơn giản hơn, từ đó việc giải quyết bài toán trở nên đơn giản hơn (giống như bài toán mà ta vừa xét ở trên). Đôi lúc việc kết hợp công thức nghiệm cũng tương tự như việc giải một hệ phương trình lượng giác cơ bản bằng phương pháp thế. Ở đây ta không đề cập đến phương pháp này mà ta chỉ nói đến hai phương pháp chủ yếu sau :

a) Đường tròn lượng giác

* **Các khái niệm cơ bản :**

- Đường tròn lượng giác: là đường tròn có bán kính đơn vị $R=1$ và trên đó ta đã chọn một chiều dương $(+)$ (thông thường chiều dương là chiều ngược chiều kim đồng hồ)

- Cung lượng giác: $\overset{\frown}{AB}$ (với A, B là 2 điểm trên đường tròn lượng giác) là cung vạch bởi điểm M di chuyển trên đường tròn lượng giác theo một chiều nhất định từ A đến B.
- Góc lượng giác: khác với góc bình thường góc lượng giác có một chiều nhất định

*__Phương pháp biểu diễn góc và cung lượng giác :__

- Biểu diễn các điểm ngọn của cung lượng giác biết số đo có dạng $\alpha + k\pi$:

Ta đưa số đo về dạng $\alpha + k\dfrac{2\pi}{m}$.

Một số công thức chính được dùng nhiều ở phương pháp này :

1. $\cot gx - tgx = 2\cot g\,2x$
2. $\cot gx + tgx = \dfrac{2}{\sin 2x}$
3. $\dfrac{1}{\sin 2x} - \cot gx = -\cot g\,2x$

TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

Bài 1. QUI TẮC ĐẾM

1/ QUY TẮC CỘNG

QUY TẮC

Một công việc được hoàn thành bởi **một trong hai** hành động. Nếu hành động này có **m cách** thực hiện, hành động kia có **n cách** thực hiện **không trùng** với bất kì cách nào của hành động thứ nhất thì công việc đó có **m+n cách** thực hiện.

Chú ý . Quy tắc cộng có thể mở rộng cho nhiều trường hợp.

2/ QUY TẮC NHÂN

QUY TẮC

Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động **liên tiếp**. Nếu có **m cách** thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện hành động thứ hai thì có **m.n cách** hoàn thành công việc.

Chú ý . Quy tắc nhân có thể mở rộng cho nhiều trường hợp.

Bài 2.HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP - TỔ HỢP

HOÁN VỊ

1. Định nghĩa : Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 1$) . Mỗi kết quả của sự sắp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một **hoán vị** của n phần tử đó

1. Giai thừa:

$n! = 1.2.3...n$ *Qui ước:* $0! = 1$

$n! = (n-1)!n$

$\frac{n!}{p!} = (p+1).(p+2)...n$ *(với* $n>p$*)*

$\frac{n!}{(n-p)!} = (n-p+1).(n-p+2)...n$ *(với* $n>p$*)*

2. Hoán vị (không lặp):

*Một tập hợp gồm **n** phần tử (*$n \geq 1$*). Mỗi cách sắp xếp **n** phần tử này theo một thứ tự nào đó được gọi là một hoán vị của **n** phần tử.*

*Số các hoán vị của **n** phần tử là:* $P_n = n!$ = 1.2.3........(n-1).n

3. Hoán vị lặp:

Cho k phần tử khác nhau: $a_1, a_2, ..., a_k$*. Một cách sắp xếp n phần tử trong đó gồm* n_1 *phần tử* a_1*,* n_2 *phần tử* a_2*, ...,* n_k *phần tử* a_k *(*$n_1+n_2+ ...+ n_k = n$*) theo một thứ tự nào đó được gọi là một hoán vị lặp cấp n và kiểu (*$n_1, n_2, ..., n_k$*) của k phần tử.*

Số các hoán vị lặp cấp n, kiểu ($n_1, n_2, ..., n_k$*) của k phần tử là:*

$$P_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

4. Hoán vị vòng quanh:

Cho tập A gồm n phần tử. Một cách sắp xếp n phần tử của tập A thành một dãy kín được gọi là một hoán vị vòng quanh của n phần tử.

Số các hoán vị vòng quanh của n phần tử là: $Q_n = (n-1)!$

CHỈNH HỢP

1. Định nghĩa : Cho tập hợp A có n phần tử(n ≥ 1) .
Kết quả của việc lấy k phần tử khác nhau từ n phần tử của tập hợp A và sắp thứ tự chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử □cho.

2. **Số chỉnh hợp chập k của n phần tử :**

Nếu kí hiệu số chỉnh hợp chập k của n phần tử là A_n^k thì $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

1. Chỉnh hợp (không lặp):

*Cho tập hợp A gồm **n** phần tử. Mỗi cách sắp xếp **k** phần tử của A (1 ≤ k ≤ n) theo một thứ tự nào đóđược gọi là một **chỉnh hợp chập k của n phần tử** của tập A.*

Số chỉnh hợp chập k của n phần tử: $A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

- *Công thức trên cũng đúng cho trường hợp k = 0 hoặc k = n.*
- *Khi k = n thì* $A_n^n = P_n = n!$

2. Chỉnh hợp lặp:

Cho tập A gồm n phần tử. Một dãy gồm k phần tử của A, trong đó mỗi phần tử có thể được lặp lại nhiều lần, được sắp xếp theo một thứ tự nhất định được gọi là một chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử của tập A.

Soá chænh hôïp laëp chaäp k cuûa n phaàn töû: $\overline{A_n^k} = n^k$

TỔ HỢP

.Định nghĩa : Cho tập hợp A có n phần tử (n ≥ 1). Mỗi tập con gồm k phần tử của A (1 ≤ k ≤ n) được gọi là là một tổ hợp chập k của n phần tử .

1. Tổ hợp (không lặp):

*Cho tập A gồm **n** phần tử. Mỗi tập con gồm **k** (1 ≤ k ≤ n) phần tử của A được gọi là một **tổ hợp chập k của n phần tử**.*

Số các tổ hợp chập k của n phần tử: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

- *Qui ước:* $C_n^0 = 1$

Tính chất:

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$
$$C_n^k = C_n^{n-k}$$
$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$
$$C_n^k = \frac{n-k+1}{k} C_n^{k-1}$$

2. Tổ hợp lặp:

Cho tập A = $\{a_1; a_2; ...; a_n\}$ và số tự nhiên k bất kì. Một tổ hợp lặp chập k của n phần tử là một hợp gồm k phần tử, trong đó mỗi phần tử là một trong n phần tử của A.

Số tổ hợp lặp chập k của n phần tử: $\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{m-1}$

3. Phân biệt chỉnh hợp và tổ hợp:

• *Chỉnh hợp và tổ hợp liên hệ nhau bởi công thức:* $A_n^k = k!C_n^k$

• *Chỉnh hợp: có thứ tự. Tổ hợp: không có thứ tự.*

$\Rightarrow$ *Những bài toán mà kết quả phụ thuộc vào vị trí các phần tử –> chỉnh hợp*

Ngược lại, là tổ hợp.

• *Cách lấy k phần tử từ tập n phần tử ($k \le n$):*

+ *Không thứ tự, không hoàn lại:* C_n^k

+ *Có thứ tự, không hoàn lại:* A_n^k

+ *Có thứ tự, có hoàn lại:* $\overline{A_n^k}$

Bài 3 .NHỊ THỨC NIUTƠN

1. Công thức nhị thức Niu tơn

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots\dots + C_n^k a^{n-k}b^k + \dots\dots + C_n^{n-1} a.b^{n-1} + C_n^n b^n \ (1)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \ (*)$$

Hệ quả

Với a=b=1, ta có : $2^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$

Với a=1;b=-1, ta có : $0 = C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + (-1)^n C_n^n$

Chú ý .Trong biểu thức ở vế phải của công thức (1)

a/ Số các hạng tử là (n +1).

b/ Các hạng tử có số mũ của a giảm dần từ n đến 0, số mũ của b tăng dần từ 0 đến n , nhưng tổng các số mũ của a và b trong mỗi hạng tử luôn bằng n (qui ước $a^0=b^0=1$)

c/ Các hệ số của mỗi hạng tử cách đều hai hạng tử đầu và cuối thì bằng nhau.

2. Tam giác Pa-xcan

n=0						1					
n=1					1		1				
n=2				1		2		1			
n=3			1		3		3		1		
n=4		1		4		6		4		1	
n=5	1		5		10		10		5		1

Nhận xét

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

1. Công thức khai triển nhị thức Newton: *Với mọi $n \in N$ và với mọi cặp số a, b ta có:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

2. Tính chất:

1) Số các số hạng của khai triển bằng n + 1

2) Tổng các số mũ của a và b trong mỗi số hạng bằng n

3) Số hạng tổng quát (thứ k+1) có dạng: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ *(k =0, 1, 2, ..., n)*

4) Các hệ số của các cặp số hạng cách đều số hạng đầu và cuối thì bằng nhau:

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

5) $C_n^0 = C_n^n = 1, \quad C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$

** Nhận xét: Nếu trong khai triển nhị thức Newton, ta gán cho a và b những giá trị đặc biệt thì ta sẽ thu được những công thức đặc biệt. Chẳng hạn:*

$(1+x)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + ... + C_n^n \quad \Rightarrow \quad C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$

$(x-1)^n = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + ... + (-1)^n C_n^n \quad \Rightarrow \quad C_n^0 - C_n^1 + ... + (-1)^n C_n^n = 0$

Bài 4. PHÉP THỬ VÀ BIẾN CỐ

I- PHÉP THỬ, KHÔNG GIAN MẪU

1/ Phép thử

Phép thử ngẫu nhiên là phép thử mà ta không đoán trước được kết quả của nó, mặc dù đã biết tập hợp tất cả các kết quả có thể của phép thử đó.

2/ Không gian mẫu

Tập hợp các kết quả có thể xảy ra của một phép thử được gọi là không gian mẫu của phép thử và kí hiệu là Ω

II- BIẾN CỐ

Biến cố là một tập con của không gian mẫu

Tập $\varnothing$ được gọi là biến cố không thể . Còn tập Ω được gọi là biến cố chắc chắn.

III- PHÉP TOÁN TRÊN CÁC BIẾN CỐ

Tập $\Omega \setminus A$ được gọi là biến cố đối của biến cố A, kí hiệu là $\overline{A}$

Tập $A \cup B$ được gọi là **hợp** của các biến cố A và B.

Tập $A \cap B$ được gọi là **giao** của các biến cố A và B.

Nếu $A \cap B = \varnothing$ thì ta nói A và B **xung khắc.**

Chú ý : $A \cup B$ xảy ra khi và chỉ khi A xảy ra hoặc B xảy ra .

$A \cap B$ xảy ra khi và chỉ khi A và B đồng thời xảy ra . Biến cố $A \cap B$ còn được kí hiệu A.B

A và B xung khắc khi và chỉ khi chúng không khi nào cùng xảy ra.

Bài 5. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

I / ĐỊNH NGHĨA CỔ ĐIỂN CỦA XÁC SUẤT

Định nghĩa

Giả sử A biến cố liên quan đến một phép thử chỉ có một số hữu hạn kết quả đồng khả năng xuất hiện. Ta gọi tỉ số $\frac{n(A)}{n(\Omega)}$ là xác suất của biến cố A, kí hiệu là P(A) Vậy $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$

Chú ý n(A) là số phần tử của A

$n(\Omega)$ là số các kết quả có thể xảy ra của phép thử.

II/ TÍNH CHẤT CỦA XÁC SUẤT

1/ Định lí

a/ $P(\varnothing) = 0$, $P(\Omega) = 1$

b/ $0 \le P(A) \le 1$, với mọi biến cố A

c/ Nếu A và B xung khắc thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Hệ quả : Với mọi biến cố A, ta có $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

III/ CÁC BIẾN CỐ ĐỘC LẬP, CÔNG THỨC NHÂN XÁC SUẤT

A và B là hai biến cố độc lập khi và chỉ khi $P(AB) = P(A).P(B)$

1. Biến cố

- *Không gian mẫu Ω: là tập các kết quả có thể xảy ra của một phép thử.*
- *Biến cố A: là tập các kết quả của phép thử làm xảy ra A.* $A \subset \Omega$.
- *Biến cố không:* $\varnothing$
- *Biến cố chắc chắn:* Ω
- *Biến cố đối của A:* $\overline{A} = \Omega \setminus A$
- *Hợp hai biến cố:* $A \cup B$
- *Giao hai biến cố:* $A \cap B$ *(hoặc A.B)*
- *Hai biến cố xung khắc:* $A \cap B = \varnothing$
- *Hai biến cố độc lập: nếu việc xảy ra biến cố này không ảnh hưởng đến việc xảy ra biến cố kia.*

2. Xác suất

- *Xác suất của biến cố:* $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$
- $0 \le P(A) \le 1; \quad P(\Omega) = 1; \qquad P(\varnothing) = 0$
- *Qui tắc cộng: Nếu* $A \cap B = \varnothing$ *thì* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Mở rộng: A, B bất kì: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A.B)$

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- Qui taéc nhaân: Neáu A, B ñoäc laäp thì P(A.B) = P(A). P(B)

1. Biến ngẫu nhiên rời rạc

- $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$
- $P(X=x_k) = p_k \qquad p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$

2. Kì vọng (giá trị trung bình)

- $\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

3. Phương sai và độ lệch chuẩn

- $V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \mu^2$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

CHƯƠNG III

§1. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

A. LÝ THUYẾT

Để chứng minh mệnh đề chứa biến A(n) là một mệnh đề đúng với mọi giá trị nguyên dương n, ta thực hiện như sau:

• Bước 1: Kiểm tra mệnh đề đúng với n = 1.

• Bước 2: Giả thiết mệnh đề đúng với số nguyên dương n = k tuỳ ý (k ≥ 1), chứng minh rằng mệnh đề đúng với n = k + 1.

***Chú ý:** Nếu phải chứng minh mệnh đề A(n) là đúng với với mọi số nguyên dương n ≥ p thì:*

+ Ở bước 1, ta phải kiểm tra mệnh đề đúng với n = p;

+ Ở bước 2, ta giả thiết mệnh đề đúng với số nguyên dương bất kì n = k ≥ p và phải chứng minh mệnh đề đúng với n = k + 1.

§2. DÃY SỐ

A. LÝ THUYẾT

***1. Định nghĩa**:* Một hàm số u xác định trên tập $\mathbb{N}^*$ các số nguyên dương gọi là dãy số vô hạn.

Kí hiệu $u:\mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $n \mapsto u(n)$. Đặt $u_n = u(n)$. Ta gọi u_n là số hạng tổng quát (hay số hạng thứ n) của dãy số.

2. Cách cho một dãy số:

- Cho bằng công thức của số hạng tổng quát
- Cho bằng công thức truy hồi
- Cho bằng cách mô tả

3. Dãy số tăng, dãy số giảm:

- (u_n) là dãy số tăng $\Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$ với $\forall n \in N^*$.

  $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0$ với $\forall n \in N^* \Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ với $\forall n \in N^*$ ($u_n > 0$).

- (u_n) là dãy số giảm $\Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$ với $\forall n \in N^*$.

  $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0$ với $\forall n \in N^* \Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ với $\forall n \in N^*$ ($u_n > 0$).

4. Dãy số bị chặn:

- (u_n) là dãy số bị chặn trên $\Leftrightarrow \exists M \in R$: $u_n \le M, \forall n \in N^*$.
- (u_n) là dãy số bị chặn dưới $\Leftrightarrow \exists m \in R$: $u_n \ge m, \forall n \in N^*$.
- (u_n) là dãy số bị chặn $\Leftrightarrow \exists m, M \in R$: $m \le u_n \le M, \forall n \in N^*$.

§3. CẤP SỐ CỘNG

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa: *(u_n) là cấp số cộng* $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + d, \ \forall n \in N^*$ *(d: công sai)*

2. Số hạng tổng quát: $u_n = u_1 + (n-1)d$ *với* $n \geq 2$

3. Tính chất các số hạng: $u_k = \dfrac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$ *với* $k \geq 2$

4. Tổng n số hạng đầu tiên: $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \dfrac{n(u_1 + u_n)}{2} = \dfrac{n\left[2u_1 + (n-1)d\right]}{2}$

§4. CẤP SỐ NHÂN

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa: *(u_n) là cấp số nhân* $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n.q$ *với* $n \in N^*$ *(q: công bội)*

2. Số hạng tổng quát: $u_n = u_1.q^{n-1}$ *với* $n \geq 2$

3. Tính chất các số hạng: $u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1}$ *với* $k \geq 2$

4. Tổng n số hạng đầu tiên: $\left[\begin{array}{ll} S_n = nu_1 & \text{với } q = 1 \\ S_n = \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q} & \text{với } q \neq 1 \end{array}\right.$

CHƯƠNG IV: GIỚI HẠN

CHỦ ĐỀ: GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa:

a) ***Định nghĩa 1:*** Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ số hạng nào đó trở đi. Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$.

b) ***Định nghĩa 2:*** Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là a hay (u_n) dần tới a khi n dần tới vô cực ($n \to +\infty$), nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - a)=0$. Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=a$ hay $u_n \to a$ khi $n \to +\infty$.

❖ ***Chú ý:*** $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=\lim(u_n)$.

2. Một vài giới hạn đặc biệt.

a) $\lim\frac{1}{n}=0$, $\lim\frac{1}{n^k}=0$, $n\in\mathbb{Z}_+^*$

b) $\lim(q^n)=0$ với $|q|<1$.

c) Lim(u_n)=c (c là hằng số) => Lim(u_n)=limc=c.

3. Một số định lý về giới hạn của dãy số.

a) ***Định lý 1:*** Cho dãy số (u_n),(v_n) và (w_n) có : $v_n \le u_n \le w_n \ \forall n\in\mathbb{N}^*$ và $\lim(v_n)=\lim(w_n)=a \Rightarrow \lim(u_n)=a$.

b) ***Định lý 2:*** Nếu lim(u_n)=a , lim(v_n)=b thì:

$$\lim(u_n \pm v_n)=\lim(u_n)\pm\lim(v_n)=a\pm b$$

$$\lim(u_n.v_n)=\lim u_n.\lim v_n=a.b$$

$$\lim\frac{u_n}{v_n}=\frac{\lim(u_n)}{\lim(v_n)}=\frac{a}{b},\left(v_n\neq 0\ \forall n\in\mathbb{N}^*;b\neq 0\right)$$

$$\lim\sqrt{u_n}=\sqrt{\lim(u_n)}=\sqrt{a},\left(u_n\ge 0, a\ge 0\right)$$

4. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có công bội q ,với $|q|<1$.

$$\lim S_n=\lim\frac{u_1}{1-q}$$

5. Dãy số dần tới vô cực:

a) Ta nói dãy số (u_n) dần tới vô cực $(u_n \to +\infty)$ khi n dần tới vơ cực $(n \to +\infty)$ nếu u_n lớn hơn một số dương bất kỳ, kể từ số hạng nào đó trở đi. Kí hiệu: lim(u_n)=$+\infty$ hay $u_n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$.

b) Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ khi $n \to +\infty$ nếu $\lim(-u_n)=+\infty$.Ký hiệu: lim(u_n)=$-\infty$ hay $u_n \to -\infty$ khi $n \to +\infty$.

c) Định lý:

- Nếu : $\lim(u_n)=0$ $\left(u_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*\right)$ thì $\lim \frac{1}{u_n}=\infty$
- Nếu : $\lim(u_n)=\infty$ thì $\lim \frac{1}{u_n}=0$

B. **PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN**.

1. **Giới hạn của dãy số (u_n) với** $u_n=\frac{P(n)}{Q(n)}$ **với P,Q là các đa thức:**

- Nếu **bậc P = bậc Q = k**, hệ số cao nhất của P là a_0, hệ số cao nhất của Q là b_0 thì chia tử số và mẫu số cho n^k để đi đến kết quả : $\lim(u_n)=\frac{a_0}{b_0}$.
- Nếu **bậc P nhỏ hơn bậc Q = k**, thì chia tử và mẫu cho n^k để đi đến kết quả :$\lim(u_n)=0$.
- Nếu **k = bậc P > bậc Q**, chia tử và mẫu cho n^k để đi đến kết quả :$\lim(u_n)=\infty$.

2. **Giới hạn của dãy số dạng:** $u_n=\frac{f(n)}{g(n)}$ **, f và g là các biển thức chứa căn.**

- Chia tử và mẫu cho n^k với k chọn thích hợp.

Nhân tử và mẫu với biểu thức liên hợp

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. **Định nghĩa:**Cho hàm số f(x) xác định trên khoảng K.Ta nói rằng hàm số f(x) có giới hạn là L khi x dần tới a nếu với mọi dãy số (x_n), $x_n \in K$ và $x_n \neq a$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ mà $\lim(x_n)=a$ đều có $\lim[f(x_n)]=L$.Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]=L$.
2. **Một số định lý về giới hạn của hàm số:**

a) **Định lý 1:**Nếu hàm số có giới hạn bằng L thì giới hạn đó là duy nhất.

b) **Định lý 2:**Nếu các giới hạn: $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]=L$, $\lim\limits_{x\to a}\left[g(x)\right]=M$ thì:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]\pm\lim_{x\to a}\left[g(x)\right]=L\pm M$$

$$\lim_{x\to a}\left[f(x).g(x)\right]=\lim_{x\to a}\left[f(x)\right].\lim_{x\to a}\left[g(x)\right]=L.M$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]}{\lim\limits_{x\to a}\left[g(x)\right]}=\frac{L}{M}\ ,\ M\neq 0$$

$$\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]}=\sqrt{L}\ ;f(x)\geq 0,L\geq 0$$

c) Cho ba hàm số f(x), h(x) và g(x) xác định trên khoảng K chứa điểm a (có thể trừ điểm a), $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ $\forall x\in K, x\neq a$ và $\lim\limits_{x\to a}\left[g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}\left[h(x)\right]=L \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]=L$.

3. **Mở rộng khái niệm giới hạn hàm số:**

a) Trong định nghĩa giới hạn hàm số , nếu với mọi dãy số (x_n), $\lim(x_n) = a$, đều có $\lim[f(x_n)]=\infty$ thì ta nói f(x) dần tới vô cực khi x dần tới a, kí hiệu: $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]=\infty$.

b) Nếu với mọi dãy số (x_n) , $\lim(x_n) = \infty$ đều có $\lim[f(x_n)] = L$, thì ta nói f(x) có giới hạn là L khi x dần tới vô cực, kí hiệu: $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)\right]=L$.

c) Trong định nghĩa giới hạn hàm số chỉ đòi hỏi với mọi dãy số (x_n), mà $x_n > a$ $\forall n\in \mathbb{N}^*$, thì ta nói f(x) có giới hạn về bên phải tại a, kí hiệu : $\lim\limits_{x\to a^+}\left[f(x)\right]$. Nếu chỉ đòi hỏi với mọi dãy số (x_n), $x_n < a$ $\forall n\in \mathbb{N}^*$ thì ta nói hàm số có giới hạn bên trái tại a , kí hiệu: $\lim\limits_{x\to a^-}\left[f(x)\right]$

B. <u>PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN</u>

Khi tìm giới hạn hàm số ta thường gặp các dạng sau:

1. **Giới hạn của hàm số dạng:** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}\ \left(\dfrac{0}{0}\right)$

- Nếu f(x) , g(x) là các hàm đa thức thì có thể chia tử số , mẫu số cho (x-a) hoặc $(x-a)^2$.
- Nếu f(x) , g(x) là các biểu thức chứa căn thì nhân tử và mẫu cho các biểu thức liên hợp.

2. **Giới hạn của hàm số dạng:** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}\ \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

- Chia tử và mẫu cho x^k với k chọn thích hợp. Chú ý rằng nếu $x\to+\infty$ thì coi như x>0, nếu $x\to-\infty$ thì coi như x<0 khi đưa x ra hoặc vào khỏi căn bậc chẵn.

3. Giới hạn của hàm số dạng: $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x).g(x)\right]\ \ (0.\infty)$. Ta biến đổi về dạng: $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

4. **Giới hạn của hàm số dạng:** $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}\right]\ \ (\infty\text{-}\infty)$

. Đưa về dạng: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-g(x)}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}}$

<u>HÀM SỐ LIÊN TỤC</u>

A. <u>KIẾN THỨC CẦN NHỚ</u>

1. **Hàm số liên tục tại một điểm trên một khoảng:**

- Cho hàm số f(x) xác định trên khoảng (a;b). Hàm số được gọi là liên tục tại điểm $x_0 \in$ (a;b) nếu: $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]=f(x_0)$.Điểm x_0 tại đó f(x) không liên tục gọi là điểm gián đoạn của hàm số.
- f(x) xác định trên khoảng (a;b)
  liên tục tại điểm $x_0 \in$ (a;b) $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+}\left[f(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0^-}\left[f(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]=f(x_0)$.
- f(x) xác định trên khoảng (a;b) được gọi là liên tục trên khoảng (a;b) nếu nó liên tục

tại mọi điểm thuộc khoảng ấy.

- f(x) xác định trên khoảng [a;b] được gọi là liên tục trên khoảng [a;b] nếu nó liên tục trên khoảng (a;b) và $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+}\left[f(x)\right]=f(a) \\ \lim\limits_{x\to b^-}\left[f(x)\right]=f(b) \end{cases}$

2. **Một số định lý về hàm số liên tục:**

- **Định lý 1:** f(x) và g(x) liên tục tại x_0 thì: $f(x)\pm g(x)$, $f(x).g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\left(g(x)\neq 0\right)$ cũng liên tục tại x_0 .
- **Đinh lý 2:** Các hàm đa thức, hàm hữu tỷ, hàm lượng giác liên tục trên tập xác định của chúng.
- **Định lý 3:** f(x) liên tục trên đoạn [a;b] thì nó đạt GTLN, GTNN và mọi giá trị trung giữa GTLN và GTNN trên đoạn đó.
    - Hệ quả: Nếu f(x) liên tục trên đoạn [a;b] và f(a).f(b)<0 thì tồn tại ít nhất một điểm $c\in(a;b)$ sao cho f(c) = 0 . Tức là có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng (a;b).

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.

1. **Xét tính liên tục của hàm số dạng:** $f(x)=\begin{cases} g(x) & (x\neq x_0) \\ a & (x=x_0) \end{cases}$

- Tìm $\lim\limits_{x\to x_0}\left[g(x)\right]$.Hàm số liên tục tại x_0 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\left[g(x)\right]=a$.

2. **Xét tính liên tục của hàm số dạng:** $f(x)=\begin{cases} g(x) & (x<x_0) \\ a & (x=x_0) \\ h(x) & (x>x_0) \end{cases}$

- Tìm : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0^-}\left[f(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0^-}\left[g(x)\right] \\ \lim\limits_{x\to x_0^+}\left[f(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0^+}\left[g(x)\right] \\ f(x_0) \end{cases}$. Hàm số liên tục tại x = x_0

  $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+}\left[f(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0^-}\left[f(x)\right]=f(x_0)=a$.

3. **Chứng minh phương trình f(x) = 0 có nghiệm trong khoảng (a;b).**

- Chứng tỏ f(x) liên tục trên đoạn [a;b].
- Chứng tỏ f(a).f(b)<0

  Khi đó f(x) = 0 có ít nhất một nghiệm thuộc (a;b).

  Nếu chưa có (a;b) thì ta cần tính các giá trị f(x) để tìm a và b. Muốn chứng minh f(x)=0 có hai , ba nghiệm thì ta tìm hai , ba khoảng rời nhau và trên mỗi khoảng f(x)=0 đều có nghiệm.

CHƯƠNG VI

ĐẠO HÀM

- **KIẾN THỨC CẦN NHỚ**

1. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm

- ***Định nghĩa :*** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a\ ;\ b)$ và $x_0 \in (a\ ;\ b)$, đạo hàm của hàm số tại điểm x_0 là : $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
- ***Chú ý :***
  - Nếu kí hiệu $\Delta x = x - x_0$; $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

thì :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\ .$$

  - Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

2. Ý nghĩa của đạo hàm

- ***Ý nghĩa hình học:*** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C)
  - $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại $M_0(x_0, y_0) \in (C)$.
  - Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0, y_0) \in (C)$ là :

$$\boxed{y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0}\ .$$

- ***Ý nghĩa vật lí :***
  - Vận tốc tức thời của chuyển động thẳng xác định bởi phương trình : $s = s(t)$ tại thời điểm t_0 là $v(t_0) = s'(t_0)$.
  - Cường độ tức thời của điện lượng $Q = Q(t)$ tại thời điểm t_0 là : $I(t_0) = Q'(t_0)$.

3. Qui tắc tính đạo hàm và công thức tính đạo hàm

- ***Các quy tắc :*** Cho $u = u(x)$; $v = v(x)$; C : là hằng số .
  - $(u \pm v)' = u' \pm v'$
  - $(u.v)' = u'.v + v'.u \quad \Rightarrow (C.u)' = C.u'$
  - $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.v - v'.u}{v^2}$, $(v \neq 0) \Rightarrow \left(\dfrac{C}{u}\right)' = -\dfrac{C.u'}{u^2}$
  - Nếu $y = f(u), u = u(x) \quad \Rightarrow y'_x = y'_u.u'_x$.
- ***Các công thức :***
  - $(C)' = 0$; $(x)' = 1$
  - $\left(x^n\right)' = n.x^{n-1} \quad \Rightarrow \left(u^n\right)' = n.u^{n-1}.u'$, $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$

- $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $(x>0) \Rightarrow \left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, $(u>0)$
- $(\sin x)' = \cos x$ $\Rightarrow (\sin u)' = u'.\cos u$
- $(\cos x)' = -\sin x$ $\Rightarrow (\cos u)' = -u'.\sin u$
- $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$ $\Rightarrow (\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = \left(1+\tan^2 u\right).u'$
- $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\left(1+\cot^2 x\right)$ $\Rightarrow \Rightarrow (\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u} = -u'\left(1+\cot^2 u\right)$.

4. Vi phân

- ***Định nghĩa :***
  - Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0 vi phân của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0 là :

$$df(x_0) = f'(x_0).\Delta x \ .$$

  - Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ thì tích $f'(x).\Delta x$ được gọi là vi phân của hàm số $y=f(x)$. Kí hiệu : $df(x) = f'(x).\Delta x = f'(x).dx$ hay $dy = y'.dx$.
- ***Công thức tính gần đúng :***

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x \ .$$

5. Đạo hàm cấp cao

- ***Đạo hàm cấp 2 :***
  - *Định nghĩa :* $f''(x) = \left[f'(x)\right]'$
  - *Ý nghĩa cơ học:* Gia tốc tức thời của chuyển động $s=f(t)$ tại thời điểm t_0 là $a(t_0) = f''(t_0)$.
- ***Đạo hàm cấp cao :*** $f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'$, $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$.

- **CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP :**

1. Tìm đạo hàm theo định nghĩa

- ***Phương pháp :*** Để tìm đạo hàm theo định nghĩa ta có 2 cách sau :
  - ***Cách 1 :*** Theo quy tắc
    - *Bước 1 :* Cho x một số gia Δx và tìm số gia Δy tìm $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Lập tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
    - *Bước 2 :* Tìm giới hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
  - ***Cách 2 :*** Áp dụng công thức: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

2. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong

- *Phương pháp :*

- ***Khi biết tiếp điểm :*** Tiếp tuyến của đồ thị $(C): y=f(x)$ tại $M(x_0\ ;\ y_0)$, có phương trình là : $\boxed{y=f'(x_0).(x-x_0)+y_0}$ (1) .
- ***Khi biết hệ số góc của tiếp tuyến:*** Nếu tiếp tuyến của đồ thị $(C): y=f(x)$ có hệ số góc là k thì ta gọi $M_0(x_0\ ;y_0)$là tiếp điểm $\Rightarrow f'(x_0)=k$ (1)
  - Giải phương trình (1) tìm x_0 suy ra $y_0=f(x_0)$
  - Phương trình tiếp tuyến phải tìm có dạng : $y=k(x-x_0)+y_0$

❖ ***Chú ý :***

  - *Hệ số góc của tiếp tuyến tại $M(x_0,y_0)\in(C)$ là $k=f'(x_0)=\tan\alpha$ Trong đó α là góc giữa chiều dương của trục hoành và tiếp tuyến .*
  - *Hai đường thẳng song song với nhau thì hệ số góc của chúng bằng nhau .*
  - *Hai đường thẳng vuông góc nếu tích hệ số góc của chúng bằng -1 .*

- ***Biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(x_1;y_1)$:***
  - Viết phương trình tiếp tuyến của $y=f(x)$ tại $M_0(x_0\ ;\ y_0)$:

    $y=f'(x_0).(x-x_0)+y_0$ (1)
  - Vì tiếp tuyến đi qua $A(x_1;y_1)\Rightarrow y_1=f'(x_0).(x_1-x_0)+f(x_0)$ (*)
  - Giải phương trình(*) tìm x_0 thế vào (1) suy ra phương trình tiếp tuyến .

ĐẠO HÀM

1.Tóm tắt lý thuyết

- **Đạo hàm của $f(x)$ tại x_0, kí hiệu $f'(x_0)$ hay $y'(x_0)$**

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

- **dạng.**

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

- **Các công thức tính đạo hàm:**

<table>
<tr><td colspan="2">Đạo hàm của hằng số:
(C)’= 0</td></tr>
<tr><td>Đạo hàm của x:
$(x)'=1$
$(x^n)'=n.x^{n-1}$
$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$</td><td>Đạo hàm của hàm hợp:
$(ku)'=k(u)'$
$(u^n)'=n.u^{n-1}.u'$
$(\sqrt{u})'=\frac{1}{2\sqrt{u}}.u'$</td></tr>
</table>

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2}.u'$ (v = v(x) ≠ 0)
Đạo hàm của Tổng, Hiệu, Tích, Thương: $(u+v-w)' = u' + v' - w'$ $(u+v)' = u' + v'$ $(u-v)' = u' - v'$ $(uv)' = u'v + v'u$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} (v = v(x) \neq 0)$	
Giới hạn của $\frac{\sin x}{x}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$	

Đạo hàm của hàm số lượng giác:		
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u'\cos u$	$(\sin^n u)' = n\sin^{n-1}u.(\sin u)'$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u'\sin u$	$(\cos^n u)' = n\cos^{n-1}u.(\cos u)'$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$	$(\tan^n u)' = n\tan^{n-1}u.(\tan u)'$
$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$	$(\cot^n u)' = n\cot^{n-1}u.(\cot u)'$

Nếu hàm số u = g(x) có đạo hàm tại x là u'_x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại u là y'_u thì hàm hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm tại x là:

$$y_x = y_u.u_x$$

2. Các bài toán cơ bản:

Bài toán 1: Tính đạo hàm bằng định nghĩa:

- **Phương pháp giải**

Bước 1: Gọi Δx là gia số của x tại x_0, tính

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Bước 2: Lập tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Bước 3: Tìm $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Bài toán 2: Chứng minh hàm số không hoặc có đạo hàm tại x_0

- **Phương pháp giải**: Để chứng minh hàm số $y = f(x)$ không hoặc có đạo hàm tại x = x_0 ta làm như sau:

Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ và $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ của hàm số y = $f(x)$ sau đó so sánh

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ và $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$:

- Nếu $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ thì hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại x_0.
- Nếu $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\neq\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ thì hàm số $y=f(x)$ không có đạo hàm tại x_0.

<u>Bài toán 4:</u> Viết phương trình tiếp tuyến của hàm số $y=f(x)$

Dạng 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C), viết phương trình tiếp tuyến tại điểm M($x_0;y_0$)

❖ **Phương pháp giải:**

Bước1: Xác định tọa độ $x_0;y_0$

Bước 2: Tính đạo hàm của $f'(x)$ tại x_0

Bước 3: Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm M($x_0;y_0$), có dạng:

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

<u>Bài toán 6:</u> Giải bất phương trình.

❖ **Phương pháp giải:** Để giải bất phương trình ta làm các bước sau:

Bước 1: Tính đạo hàm của hàm số $f(x)$ và $g(x)$ (nếu có)

Bước 2: Xác định điều kiện bất phương trình rồi thay $f'(x)$ và $g'(x)$ (nếu có) vào điều kiện tìm nghiệm x_0

Bước 3: Lập bảng xét dấu rồi kết luận tập nghiệm của bất phương trình.

CHƯƠNG 1 HÌNH HỌC 11
(các dạng bài tập chính)

I - PHÉP TỊNH TIẾN

1) tóm tắt lí thuyết

a) $T_{\vec{v}}(A)=A' \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'}=\vec{v}$

b) $\begin{cases} T_{\vec{v}}(M)=M' \\ T_{\vec{v}}(N)=N' \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{M'N'}$

c) Biểu thức thọa độ: Với $\vec{v}=(x_0;y_0), M=(x;y), T_{\vec{v}}(M)=M'(x';y')$ thì $\begin{cases} x'=x+x_0 \\ y'=y+y_0 \end{cases}$

2) Dạng bài tập

a) dạng 1: Cho điểm $A(x;y)$ tìm ảnh $A'(x';y')$ là ảnh của A qua phép $T_{\vec{v}}$ với $\vec{v}=(x_0;y_0)$

CÁCH GIẢI:

ta có: $\begin{cases} x'=x+x_0 \\ y'=y+y_0 \end{cases}$

Vậy $A'(x+x_0;y+y_0)$.

b) Dạng 2 : Cho đường thẳng $d: ax+by+c=0$ tìm ảnh của d qua phép $T_{\vec{v}}$ với $\vec{v}=(x_0;y_0)$

CÁCH GIẢI :

Gọi d' là ảnh của d qua phép $T_{\vec{v}}$ với $\vec{v}=(x_0;y_0)$

Cách 1 :

Với $M=(x;y)\in d$ ta có $T_{\vec{v}}(M)=M'(x';y')\in d'$.Áp dụng biểu thức tọa độ của phép $T_{\vec{v}}$:

$$\begin{cases} x'=x+x_0 \\ y'=y+y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x'-x_0 \\ y=y'-y_0 \end{cases}$$

Khi đó ta có

$$d': a(x'-x_0)+b(y'-y_0)+c=0 \Leftrightarrow ax'+by'-ax_0-by_0+c=0$$

Vậy pt của d' là : $ax+by-ax_0-by_0+c=0$

Cách 2 ;

Ta có d và d' song song hoặc trùng nhau, vậy d' có một vec tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a;b)$.

Ta tìm 1 điểm thuộc d'.

Ta có $M\left(0;-\frac{c}{b}\right)\in d$, ảnh $M'(x';y')\in d'$, ta có

$$\begin{cases} x'=0+x_0=x_0 \\ y'=-\frac{c}{b}+y_0 \end{cases}$$

Phương trình của d' là

$$a\left(x-x_0\right)+b\left(y+\frac{c}{b}-y_0\right)=0 \Leftrightarrow ax+by-ax_0-by_0+c=0$$

II - PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC (Xét đx trục Ox, đx trục Oy tương tự)

1) tóm tắt lí thuyết

a) $\text{Đ}_d\left(M\right)=M' \Leftrightarrow d$ là trung trực của MM'

b) $\begin{cases}\text{Đ}_d\left(M\right)=M'\\ \text{Đ}_d\left(N\right)=N'\end{cases} \Rightarrow M'N'=MN$

c) Biểu thức tọa độ của phép đx trục Ox

$$\begin{cases}x'=x\\ y'=-y\end{cases}$$

d) Biểu thức thọa độ của phép đx trục Oy

$$\begin{cases}x'=-x\\ y'=y\end{cases}$$

2) Bài tập

a) dạng 1: Cho điểm $A\left(x;y\right)$ tìm ảnh $A'\left(x';y'\right)$ là ảnh của A qua phép Đ_{Ox}

CÁCH GIẢI :

Ta có : $\begin{cases}x'=x\\ y'=-y\end{cases}$ vậy $A'\left(x;-y\right)$

b) Dạng 2: Cho đường thẳng $d:ax+by+c=0$ tìm ảnh của d qua phép Đ_{Ox}

CÁCH GIẢI :

+) Gọi d’ là ảnh của d, ta cần tìm pt của d’.

Cách 1 :

Với $M=\left(x;y\right)\in d$ ta có $\text{Đ}_{Ox}\left(M\right)=M'\left(x';y'\right)\in d'$,Áp dụng biểu thức tọa độcủa phép Đ_{Ox}

$$\begin{cases}x'=x\\ y'=-y\end{cases}$$

Khi đó ta có $ax'-by'+c=0$

Vậy pt của d’ là $ax-by+c=0$

Cách 2 :

Ta có 2 điểm $M\left(0;-\frac{c}{b}\right),N\left(-\frac{c}{a};0\right)\in d$, Gọi ảnh của chúng lần lượt là

$$M'\left(0;\frac{c}{b}\right),N'\left(-\frac{c}{a};0\right)\in d'$$

Phương trình của d’ là

$$\frac{x-0}{-\frac{c}{a}-0}=\frac{y-\frac{c}{b}}{0-\frac{c}{b}} \Leftrightarrow -\frac{c}{b}x+\frac{c}{a}y-\frac{c^2}{ab}=0 \Leftrightarrow ax-by+c=0$$

III - PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

1) tóm tắt lí thuyết

a) $Đ_I(M)=M \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}=-\overrightarrow{IM'}$

b) $\begin{cases}Đ_I(M)=M\\ Đ_I(N)=N'\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{M'N'}=-\overrightarrow{MN} \Rightarrow M'N'=MN$

c) Biểu thức tọa độ của phép đx tâm O(0 ;0) $\begin{cases}x'=-x\\ y'=-y\end{cases}$,

2) Bài tập

a) dạng 1: Cho điểm $A(x;y)$ tìm ảnh $A'(x';y')$ là ảnh của A qua phép $Đ_O$

CÁCH GIẢI :

Ta có : $\begin{cases}x'=-x\\ y'=-y\end{cases}$

b) Dạng 2 : Cho đường thẳng $d: ax+by+c=0$ tìm ảnh của d qua phép $Đ_O$

CÁCH GIẢI :

+) Gọi d' là ảnh của d, ta cần tìm pt của d'.

Cách 1 :

Với $M=(x;y)\in d$ ta có $Đ_O(M)=M'(x';y')\in d'$, Áp dụng biểu thức tọa độ của phép $Đ_O$

$$\begin{cases}x'=-x\\ y'=-y\end{cases}$$

Khi đó ta có $-ax'-by'+c=0$

Vậy pt của d' là $ax+by-c=0$

Cách 2 :

Ta có d và d' song song hoặc trùng nhau, vậy d' có một vec tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a;b)$.

Ta tìm 1 điểm thuộc d'.

Ta có $M\left(0;-\frac{c}{b}\right)\in d$, ảnh $M'(x';y')\in d'$, ta có

$$\begin{cases}x'=0\\ y'=\frac{c}{b}\end{cases}$$

Vậy d' có phương trình là : $a(x-0)+b\left(y-\frac{c}{b}\right)=0 \Leftrightarrow ax+by-c=0$

IV - PHÉP QUAY

1) lí thuyết :

a) $Q_{(O;\alpha)}(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases}OM=OM'\\ (OM';OM)=\alpha\end{cases}$

b) $\begin{cases} Q_{(O;\alpha)}(M) = M' \\ Q_{(O;\alpha)}(N) = N' \end{cases} \Rightarrow M'N' = MN$

2) Bài tập :

a) Dạng 1 : Cho điểm $A'(a';b')$ CM nó là ảnh của điểm $A(a;b)$ qua phép quay tâm O góc quay α, với $\alpha = \pm 90^0, \pm 60^0$.

CÁCH GIẢI:

+) Nếu $\alpha = \pm 90^0$ ta có:

$Q_{(O;\pm 90^0)}(A) = A' \Leftrightarrow \begin{cases} OA' = OA \\ (OA';OA) = \pm 90^0 \end{cases}$

Để CM $OA' = OA$ ta CM $\left|\overrightarrow{OA'}\right| = \left|\overrightarrow{OA}\right| \Leftrightarrow \sqrt{a'^2 + b'^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Để CM $(OA';OA) = \pm 90^0$ đầu tiên ta CM $OA' \perp OA \Leftrightarrow \overrightarrow{OA'}.\overrightarrow{OA} = 0 \Leftrightarrow a'a + b'b = 0$

NX trên hệ trục tọa độ chiều quay từ A đến A' là dương hay âm, từ đó suy ra $(OA';OA) = 90^0$ hoặc $(OA';OA) = -90^0$ tùy theo đề bài.

+) Nếu $\alpha = \pm 60^0$ cách giải tương tự, để CM $(OA';OA) = \pm 60^0$ ta có thể CM tam giác OAA' đều, rồi NX trên hệ trục tọa độ.

b) Dạng 2 : Cho đường thẳng $d: ax + by + c = 0$ tìm ảnh của d qua phép $Q_{(O;\alpha)}$. với $\alpha = \pm 90^0, \pm 60^0$

CÁCH GIẢI:

Ta tìm tọa độ của 2 điểm A',B' lần lượt là ảnh của 2 điểm A,B thuộc đường thẳng *d* qua $Q_{(O;\alpha)}$. Nên chọn A,B lần lượt là giao của *d* với các trục tọa độ. Khi đó ảnh của *d* là đường thẳng A'B'.

ÔN HÌNH HỌC CHƯƠNG I

I. Phép dời hình là phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì, nghĩa là nếu phép dời hình biến hai điểm *M, N* lần lượt thành hai điểm *M', N'* thì *M'N'* = *MN*.

Các tính chất của phép dời hình: biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó, biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến góc thành góc bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

II- Các phép dời hình cụ thể:

1- Phép tịnh tiến :Trong mặt phẳng , cho véc tơ $\vec{v}(a;b)$. Phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v}(a;b)$ là phép biến hình , biến một điểm M thành một điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$

Ký hiệu : $T_{\vec{v}}$.

Biểu thức tọa độ :

Trong mặt phẳng Oxy cho M(x ; y) ; V(a , b) .

Gọi $M^{/}(x^{/}; y^{1}) = T_{v}(M)$ khi đó : $\begin{cases} x^{/} = x + a \\ y^{/} = y + b \end{cases}$

2- Phép quay Trong mặt phẳng cho điểm I cố định và góc lượng giác α không đổi . Phép biến hình biến điểm I thành điểm I, biến điểm M khác I thành điểm M' sao cho IM=IM' và góc (IM;IM')= α . Được gọi là phép quay tâm I góc quay là α .
kí hiệu $Q(_{I,}\alpha)$

Chiều quay dương ngược chiều quay của kim đồng hồ (+)
Chiều quay âm trùng chiều quay của kim đồng hồ (-)

*Biểu thức tọa độ của phép quay có tâm I(a;b) điểm M(x;y) , điểm M'(x';y') và góc quay là α:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $Q_{(I,\alpha)}$, với I(a; b). Khi đó $Q_{(I,\alpha)}$ biến điểm M (x; y) thành M'(x'; y') xác định bởi:

$$\begin{cases} x' = a + (x-a)\cos\alpha - (y-b)\sin\alpha \\ y' = b + (x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha \end{cases}$$

hoặc với tâm O (0;0) $\begin{cases} x^{/} = x.\cos\alpha - y.\sin\alpha \\ y^{/} = x.\sin\alpha + y.\cos\alpha \end{cases}$

CẦN NHỚ:

1. Phương trình đường tròn dạng tổng quát :Cho Đường tròn (I) có tâm I (a, b) và R là bán kính. : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

2. Phương trình đường tròn dạng khai triển : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$
trong đó tâm I(a, b) và bán kính R = $\sqrt{a^2 + b^2 - c}$

3.Hai đường thẳng thẳng song d // d_1 :

$\left.\begin{array}{l} (d) : ax + by + c = 0 \\ (d_1): a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow a = a_1 ; b = b_1; c \neq c_1$

3-Phép vị tự Cho điểm O và một số $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành một điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm , tỉ số vị tự là k .
Ký hiệu : $V_{(O,k)} : M \to M'$, hay : M'=$V_{(O,k)}(M) \Leftrightarrow M = V_{\left(O,\frac{1}{k}\right)}(M')$

Trên mặt phẳng xOy biết tâm vị tự có tọa đô : I (x_0 ; y_0) và điểm M (x ; y) thì tọa độ của $M^{/}(x^{/}; y^{/})$ được xác định biểu thức tọa độ của phép vị tự là : $\begin{cases} x^{/} = kx + (1-k).x_0 \\ y^{/} = ky + (1-k).y_0 \end{cases}$

Hoặc tại tâm O(0;0) $\begin{cases} x^{/} = k.x \\ y^{/} = k.y \end{cases}$

Biết phép vị tự suy ra tỉ số vị tự k , ví dụ : cho $M^{/} = V_{(I;-2)}(M)$ => k = -2

4- Phép đồng dạng tỉ số *k* (*k* > 0) là phép biến hình biến mỗi cặp điểm M, N thành cặp điểm M', N' sao cho M'N' = *k*MN.

★Cho một điểm O cố định, số dương k không đổi và góc α $(0^0 \leq \alpha \leq 180^0)$, phép đồng dạng tâm O, tỉ số k, góc α là góc biến hình, biến điểm M thành $M^{/}$ sao cho :

$\begin{cases} OM^{/} = k . OM \\ \widehat{\quad} \end{cases}$

Kí hiệu : phép đồng dạng S(O, k, α)

(OM, OM$^{/}$) = α (Tâm đông dạng O, tỉ số đồng dạng k, góc đồng dạng α)
Nếu k = 1 , phép đồng dạng biến thành phép quay Q (O; α)
Nếu $\alpha = 0^0$, phép đồng dạng biến thành phép vị tự $V_{(O;k)}$
Nếu $\alpha = 180^0$, phép đồng dạng biến thành phép vị tự $V_{(O;-k)}$

Phép đồng dạng có các tính chất: biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng (và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó), biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với *k* (*k* là tỉ số của phép đồng dạng), biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số *k*, biến một góc thành góc có cùng số đo, biến đường tròn bán kính R thành đường tròn có bán kính R$^{/}$ = k.R ; OI$^{/}$ = K.OI; (OI, OI$^{/}$) = α

- Định nghĩa về hai hình bằng nhau: Hai hình gọi là bằng nhau nếu có phép dời hình biến hình này thành hình kia.

Các tính chất của phép vị tự: Phép vị tự tâm O tỉ số *k* là một phép đồng dạng tỉ số $|k|$ nên có các tính chất của phép đồng dạng. Ngoài ra, phép vị tự có tính chất đặc biệt sau: đường thẳng nối một điểm và ảnh của nó luôn luôn đi qua O; ảnh *d'* của đường thẳng *d* luôn song song hoặc trùng với *d*.

- Mỗi phép đồng dạng bao giờ cũng có thể xem là hợp thành của một phép vị tự và một phép dời hình.

- Định nghĩa về hai hình đồng dạng: Hai hình được gọi là đồng dạng với nhau nếu có phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

Chương I
PHÉP DỜI HÌNH PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

A) PHÉP DỜI HÌNH (là phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ)

1) Phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}(M)=M'$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{v}$ Gọi $M'(x';y')$ là ảnh của $M(x;y)$ qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}(a;b)$ Khi đó: $\boxed{\begin{cases}x'=x+a\\y'=y+b\end{cases}}$	**2) Phép đối xứng trục Ox** $Đ_{Ox}(M)=M'$ Nghĩa là M’ đối xứng với M qua trục tọa độ Ox Gọi $M'(x';y')$ là ảnh của $M(x;y)$ qua phép đối xứng trục Ox Khi đó: $\boxed{\begin{cases}x'=x\\y'=-y\end{cases}}$
3) Phép đối xứng trục Oy $Đ_{Oy}(M)=M'$ Nghĩa là M’ đối xứng với M qua trục tọa độ Oy Gọi $M'(x';y')$ là ảnh của $M(x;y)$ qua phép đối xứng trục Oy Khi đó: $\boxed{\begin{cases}x'=-x\\y'=y\end{cases}}$	**4) Phép đối xứng trục** $d: ax+by+c=0$ **bất kỳ** B1: Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng d: $\boxed{\begin{aligned}&\Delta: -b(x-x_0)+a(y-y_0)=0\\&\Leftrightarrow -bx+ay+bx_0-ay_0=0\end{aligned}}$ B2: Giải hệ phương trình sau để tìm giao điểm $K(x_k;y_k)$ của d và Δ: $\boxed{\begin{aligned}&\begin{cases}ax+by+c=0\\-bx+ay+(bx_0-ay_0)=0\end{cases}\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}ax+by=-c\\-bx+ay=-(bx_0-ay_0)\end{cases}\end{aligned}}$ B3: Gọi $M'(x';y')$ là ảnh của $M(x;y)$ qua phép đối xứng trục d. Khi đó: $\boxed{\begin{cases}x'=2x_k-x\\y'=2y_k-y\end{cases}}$ Thay tọa độ vào tìm được M’
5) Phép đối xứng tâm O $Đ_O(M)=M'$ Nghĩa là M’ đối xứng với M qua gốc tọa độ O Gọi $M'(x';y')$ là ảnh của $M(x;y)$ qua phép đối xứng tâm O	**6) Phép đối xứng tâm** $H(x_H;y_H)$ **bất kỳ** $Đ_H(M)=M'$ Nghĩa là M’ đối xứng với M qua tâm H Gọi $M'(x';y')$ là ảnh của $M(x;y)$ qua phép đối xứng tâm H

Khi đó: $\boxed{\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}}$	Khi đó: $\boxed{\begin{cases} x' = 2x_H - x \\ y' = 2y_H - y \end{cases}}$
7) Phép quay tâm O, góc α $Q_{(O,\alpha)}(M) = M'$ $\Leftrightarrow \begin{cases} OM' = OM \\ (OM';OM) = \alpha \end{cases}$	*** Chú ý:** + Đường chéo hình vuông cạnh a có độ dài: $a\sqrt{2}$ + Phương trình đường thẳng $d: \begin{cases} qua \quad M_0(x_0;y_0) \\ VTPT \quad \vec{n}(a;b) \end{cases}$ $\boxed{d: a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0}$ + Phương trình đường tròn (C) Dạng 1: tâm $I(a;b)$, bán kính R $\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2}$ Dạng2: tâm $I(a;b)$, bán kính $R = \sqrt{(a)^2 + (b)^2 - (c)}$ $\boxed{x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0}$

B) PHÉP ĐỒNG DẠNG

8) Phép vị tự tâm O (tỉ số k) $V_{(O,k)}(M) = M'$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$ Gọi $M'(x';y')$ là ảnh của $M(x;y)$ qua phép vị tự tâm O Khi đó: $\boxed{\begin{cases} x' = k.x \\ y' = k.y \end{cases}}$	**9) Phép vị tự tâm $H(x_H, y_H)$ bất kỳ (tỉ số k)** $V_{(H,k)}(M) = M'$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{HM'} = k.\overrightarrow{HM}$ Gọi $M'(x';y')$ là ảnh của $M(x;y)$ qua phép vị tự tâm $H(x_H, y_H)$ Khi đó: $\boxed{\begin{cases} x' = k.(x-x_H) - x_H \\ y' = k.(y-y_H) - x_H \end{cases}}$
10) Phép đồng dạng (tỉ số $k>0$) - Phép dời hình là phép đồng dạng tỉ số 1 - Phép vị tự tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số $\|k\|$	*** Chú ý:** - Hai hình bằng nhau khi có phép dời hình biến hình này thành hình kia. - Hai hình đồng dạng với nhau khi có phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

* **Phép tịnh tiến:** + Biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó
+ Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó

+ Biến tam giác thành tam giác bằng nó
+ Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính

CHƯƠNG II:

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN , QUAN HỆ SONG SONG

I. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

1. Xác định một mặt phẳng

- Ba điểm không thẳng hàng thuộc mặt phẳng. (mp(ABC), (ABC))
- Một điểm và một đường thẳng không đi qua điểm đó thuộc mặt phẳng. (mp(A,d))
- Hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng. (mp(a, b))

2. Một số qui tắc vẽ hình biểu diễn của hình không gian

- Hình biểu diễn của đường thẳng là đường thẳng, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.
- Hình biểu diễn của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song, của hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng cắt nhau.
- Hình biểu diễn phải giữ nguyên quan hệ thuộc giữa điểm và đường thẳng.
- Đường nhìn thấy vẽ nét liền, đường bị che khuất vẽ nét đứt.

VẤN ĐỀ 1: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

Muốn tìm giao tuyến của hai mặt phẳng ta có thể tìm hai điểm chung phân biệt của hai mặt phẳng. Khi đó giao tuyến là đường thẳng đi qua hai điểm chung đó.

VẤN ĐỀ 2: Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

Muốn tìm giao điểm của một đường thẳng và một mặt phẳng ta có thể tìm giao điểm của đường thẳng đó với một đường thẳng nằm trong mặt phẳng đã cho.

VẤN ĐỀ 3: Chứng minh ba điểm thẳng hàng, ba đường thẳng đồng qui

- Muốn chứng minh ba điểm thẳng hàng ta có thể chứng minh chúng cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt.
- Muốn chứng minh ba đường thẳng đồng qui ta có thể chứng minh giao điểm của hai đường thẳng này là điểm chung của hai mặt phẳng mà giao tuyến là đường thẳng thứ ba.

VẤN ĐỀ 4: Xác định thiết diện của một hình chóp với một mặt phẳng

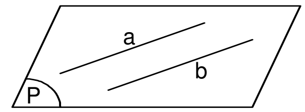
Muốn xác định thiết diện của một hình chóp với mặt phẳng (P) ta có thể làm như sau:

- Từ điểm chung có sẵn, xác định giao tuyến đầu tiên của (P) với một mặt của hình chóp (có thể là mặt phẳng trung gian).
- Cho giao tuyến này cắt các cạnh của mặt đó của hình chóp, ta sẽ được các điểm chung mới của (P) với các mặt khác. Từ đó xác định được các giao tuyến mới với các mặt này.
- Tiếp tục như trên cho tới khi các giao tuyến khép kín ta được thiết diện.

II. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

1. Định nghĩa

$$a // b \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \subset (P) \\ a \cap b = \varnothing \end{cases}$$



2. Tính chất

• Nếu ba mặt phẳng phân biệt cắt nhau từng đôi một theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng qui hoặc đôi một song song.

• Nếu hai mặt phẳng cắt nhau lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

• Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

VẤN ĐỀ 1: Chứng minh hai đường thẳng song song

Phương pháp: Có thể sử dụng 1 trong các cách sau:

1. Chứng minh 2 đường thẳng đó đồng phẳng, rồi áp dụng phương pháp chứng minh song song trong hình học phẳng (như tính chất đường trung bình, định lí Talét đảo,)

2. Chứng minh 2 đường thẳng đó cùng song song với đường thẳng thứ ba.

3. Áp dụng định lí về giao tuyến song song.

VẤN ĐỀ 2: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

Phương pháp:

• Tìm một điểm chung của hai mặt phẳng.

• Áp dụng định lí về giao tuyến để tìm phương của giao tuyến.

Giao tuyến sẽ là đường thẳng qua điểm chung và song song với đường thẳng ấy.

III. ĐƯỜNG THẲNG và MẶT PHẲNG SONG SONG

1. Định nghĩa

$$d // (P) \Leftrightarrow d \cap (P) = \varnothing$$

2. Tính chất

• Nếu đường thẳng d không nằm trên mặt phẳng (P) và d song song với đường thẳng d′ nằm trong (P) thì d song song với (P).

• Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) thì mọi mặt phẳng (Q) chứa d mà cắt (P) thì cắt theo giao tuyến song song với d.

• Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng cũng song song với đường thẳng đó.

• Nếu hai đường thẳng a và b chéo nhau thì có duy nhất một mặt phẳng chứa a và song song với b.

VẤN ĐỀ 1: Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

Phương pháp: Ta chứng minh d không nằm trong (P) và song song với một đường thẳng d′ nào đó nằm trong (P).

VẤN ĐỀ 2: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng
Phương pháp: Tìm phương của giao tuyến. Từ đó xác định thiết diện của hình chóp tạo bởi mặt phẳng song song với một hoặc hai đường thẳng cho trước.

IV. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

1. Định nghĩa

$$(P) \,//\, (Q) \Leftrightarrow (P) \cap (Q) = \varnothing$$

2. Tính chất

• Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với (Q).

• Nếu đường thẳng d song song với mp(P) thì có duy nhất một mp(Q) chứa d và song song với (P).

• Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

• Cho một điểm A $\notin$ (P). khi đó mọi đường thẳng đi qua A và song song với (P) đều nằm trong một mp(Q) đi qua A và song song với (P).

• Nếu một mặt phẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì cũng cắt mặt phẳng kia và các giao tuyến của chúng song song với nhau.

• Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.

• Định lí Thales: Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

• Định lí Thales đảo: Giả sử trên hai đường thẳng d và d′ lần lượt lấy các điểm A, B, C và A′, B′, C′ sao cho:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

Khi đó, ba đường thẳng AA′, BB′, CC′ lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song, tức là chúng cùng song với một mặt phẳng.

VẤN ĐỀ 1: Chứng minh hai mặt phẳng song song
Phương pháp: Chứng minh mặt phẳng này chứa hai đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với hai đường thẳng trong mặt phẳng kia.

VẤN ĐỀ 2: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng
Phương pháp:

• Tìm phương của giao tuyến bằng cách sử dụng định lí: Nếu 2 mặt phẳng song song bị cắt bởi 1 mặt phẳng thứ ba thì 2 giao tuyến song song.

• Sử dụng định lí trên để xác định thiết diện của hình chóp bị cắt bởi 1 mặt phẳng song song với 1 mặt phẳng cho trước.

CHƯƠNG III: VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

I. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

1. Định nghĩa và các phép toán

• Định nghĩa, tính chất, các phép toán về vectơ trong không gian được xây dựng hoàn toàn tương tự như trong mặt phẳng.

• Lưu ý:

+ Qui tắc ba điểm: Cho ba điểm A, B, C bất kỳ, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

+ Qui tắc hình bình hành: Cho hình bình hành ABCD, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

+ Qui tắc hình hộp: Cho hình hộp ABCD.A′B′C′D′, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$

+ Hệ thức trung điểm đoạn thẳng: Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB, O tuỳ ý.

Ta có: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$; $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$

+ Hệ thức trọng tâm tam giác: Cho G là trọng tâm của tam giác ABC, O tuỳ ý. Ta có:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0};\qquad \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$$

+ Hệ thức trọng tâm tứ diện: Cho G là trọng tâm của tứ diện ABCD, O tuỳ ý. Ta có:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0};\qquad \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OG}$$

+ Điều kiện hai vectơ cùng phương: $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ *cùng phương* $(\vec{a}\neq\vec{0}) \Leftrightarrow \exists! k\in R: \vec{b}=k\vec{a}$

+ Điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k ($k \neq 1$), O tuỳ ý. Ta có:

$$\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB};\qquad \overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}-k\overrightarrow{OB}}{1-k}$$

2. Sự đồng phẳng của ba vectơ

• Ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

• Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng: Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, trong đó $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ không cùng phương. Khi đó: $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng ⇔ ∃! m, n ∈ R: $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$

• Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng, $\vec{x}$ tuỳ ý.

Khi đó: ∃! m, n, p ∈ R: $\vec{x}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$

3. Tích vô hướng của hai vectơ

• Góc giữa hai vectơ trong không gian:

$$\overrightarrow{AB}=\vec{u},\overrightarrow{AC}=\vec{v}\Rightarrow(\vec{u},\vec{v})=\widehat{BAC}\ (0^0\le\widehat{BAC}\le180^0)$$

• Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian:

+ Cho $\vec{u},\vec{v}\neq\vec{0}$. Khi đó: $\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u},\vec{v})$

+ Với $\vec{u}=\vec{0}$ *hoặc* $\vec{v}=\vec{0}$. Qui ước: $\vec{u}.\vec{v}=0$

+ $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0$

II. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng: $\vec{a} \neq \vec{0}$ **là VTCP của d nếu giá của** $\vec{a}$ **song song hoặc trùng với d.**

2. Góc giữa hai đường thẳng:

- **a′//a, b′//b** $\Rightarrow (\widehat{a,b}) = (\widehat{a',b'})$
- **Giả sử** $\vec{u}$ **là VTCP của a,** $\vec{v}$ **là VTCP của b,** $(\vec{u},\vec{v}) = \alpha$.

Khi đó: $$(\widehat{a,b}) = \begin{cases} \alpha & \text{nếu } 0^0 \leq \alpha \leq 180^0 \\ 180^0 - \alpha & \text{nếu } 90^0 < \alpha \leq 180^0 \end{cases}$$

- **Nếu a//b hoặc a ≡ b thì** $(\widehat{a,b}) = 0^0$

Chú ý: $0^0 \leq (\widehat{a,b}) \leq 90^0$

3. Hai đường thẳng vuông góc:

- **a ⊥ b** $\Leftrightarrow (\widehat{a,b}) = 90^0$
- **Giả sử** $\vec{u}$ **là VTCP của a,** $\vec{v}$ **là VTCP của b. Khi đó** $a \perp b \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$.
- **Lưu ý: Hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.**

III. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

1. Định nghĩa

d ⊥ (P) ⇔ d ⊥ a, ∀a ⊂ (P)

2. Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

$$\begin{cases} a,b \subset (P), a \cap b = O \\ d \perp a, d \perp b \end{cases} \Rightarrow d \perp (P)$$

3. Tính chất

- **Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng là mặt phẳng vuông góc với đoạn thẳng tại trung điểm của nó.**

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng là tập hợp các điểm cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng đó.

- $\begin{cases} a /\!/ b \\ (P) \perp a \end{cases} \Rightarrow (P) \perp b$
- $\begin{cases} a \neq b \\ a \perp (P), b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a /\!/ b$
- $\begin{cases} (P) /\!/ (Q) \\ a \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q)$
- $\begin{cases} (P) \neq (Q) \\ (P) \perp a, (Q) \perp a \end{cases} \Rightarrow (P) /\!/ (Q)$
- $\begin{cases} a /\!/ (P) \\ b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow b \perp a$
- $\begin{cases} a \not\subset (P) \\ a \perp b, (P) \perp b \end{cases} \Rightarrow a /\!/ (P)$

4. Định lí ba đường vuông góc

Cho $a \not\perp (P), b \subset (P)$, a′ là hình chiếu của a trên (P). Khi đó b ⊥ a ⇔ b ⊥ a′

5. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

- Nếu d ⊥ (P) thì $\left(\widehat{d,(P)}\right) = 90^0$.
- Nếu $d \not\perp (P)$ thì $\left(\widehat{d,(P)}\right) = \left(\widehat{d,d'}\right)$ với d′ là hình chiếu của d trên (P).

Chú ý: $0^0 \le \left(\widehat{d,(P)}\right) \le 90^0$.

VẤN ĐỀ 1: Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng
Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

**** Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng***

Để chứng minh d ⊥ (P), ta có thể chứng minh bởi một trong các cách sau:

- *Chứng minh d vuông góc với hai đường thẳng a, b cắt nhau nằm trong (P).*
- *Chứng minh d vuông góc với (Q) và (Q) // (P).*
- *Chứng minh d // a và a ⊥ (P).*

**** Chứng minh hai đường thẳng vuông góc***

Để chứng minh d ⊥ a, ta có thể chứng minh bởi một trong các cách sau:

- *Chứng minh d vuông góc với (P) và (P) chứa a.*
- *Sử dụng định lí ba đường vuông góc.*
- *Sử dụng các cách chứng minh đã biết ở phần trước.*

IV. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

1. Góc giữa hai mặt phẳng

- $\begin{cases} a \perp (P) \\ b \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(P),(Q)}\right) = \left(\widehat{a,b}\right)$
- Giả sử (P) ∩ (Q) = c. Từ I ∈ c, dựng $\begin{cases} a \subset (P), a \perp c \\ b \subset (Q), b \perp c \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(P),(Q)}\right) = \left(\widehat{a,b}\right)$

Chú ý: $0^0 \le \left(\widehat{(P),(Q)}\right) \le 90^0$

2. Diện tích hình chiếu của một đa giác

Gọi S là diện tích của đa giác (H) trong (P), S′ là diện tích của hình chiếu (H′) của (H) trên (Q), $\varphi = \left(\widehat{(P),(Q)}\right)$. Khi đó: S′ = S.cos$\varphi$

3. Hai mặt phẳng vuông góc

- (P) ⊥ (Q) ⇔ $\left(\widehat{(P),(Q)}\right) = 90^0$
- Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc với nhau: $\begin{cases} (P) \supset a \\ a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q)$

4. Tính chất

- $\begin{cases} (P) \perp (Q), (P) \cap (Q) = c \\ a \subset (P), a \perp c \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q)$
- $\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ A \in (P) \\ a \ni A, a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow a \subset (P)$

- $\begin{cases}(P)\cap(Q)=a\\(P)\perp(R)\\(Q)\perp(R)\end{cases} \Rightarrow a\perp(R)$

VẤN ĐỀ 1: Góc giữa hai mặt phẳng

Phương pháp: Muốn tìm góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) ta có thể sử dụng một trong các cách sau:

- *Tìm hai đường thẳng a, b: a ⊥ (P), b ⊥ (Q). Khi đó:* $\left(\widehat{(P),(Q)}\right)=\left(\widehat{a,b}\right)$.

- Giaû söû (P) ∩ (Q) = c. Töø I ∈ c, döïng $\begin{cases}a\subset(P), a\perp c\\ b\subset(Q), b\perp c\end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(P),(Q)}\right)=\left(\widehat{a,b}\right)$

VẤN ĐỀ 2: Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc. Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.

*** Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc**

Để chứng minh (P) ⊥ (Q), ta có thể chứng minh bởi một trong các cách sau:

- Chứng minh trong (P) có một đường thẳng a mà a ⊥ (Q).
- Chứng minh $\left(\widehat{(P),(Q)}\right)=90^0$

*** Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng**

Để chứng minh d ⊥ (P), ta có thể chứng minh bởi một trong các cách sau:

- Chứng minh d ⊂ (Q) với (Q) ⊥ (P) và d vuông góc với giao tuyến c của (P) và (Q).
- Chứng minh d = (Q) ∩ (R) với (Q) ⊥ (P) và (R) ⊥ (P).
- Sử dụng các cách chứng minh đã biết ở phần trước.

VẤN ĐỀ 3: Tính diện tích hình chiếu của đa giác

Phương pháp: Gọi S là diện tích của đa giác (H) trong (P), S′ là diện tích của hình chiếu (H′) của (H) trên (Q), φ = $\left(\widehat{(P),(Q)}\right)$. Khi đó: S′ = S.cosφ

IV. KHOẢNG CÁCH

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, đến một mặt phẳng

$d(M,a)=MH$

$d(M,(P))=MH$ **trong đó H là hình chiếu của M trên a hoặc (P).**

2. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song

d(a,(P)) = d(M,(P)) trong đó M là điểm bất kì nằm trên a.

d((P),(Q) = d(M,(Q)) trong đó M là điểm bất kì nằm trên (P).

3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

- **Đường thẳng ∆ cắt cả a, b và cùng vuông góc với a, b được gọi là đường vuông góc chung của a, b.**
- **Nếu ∆ cắt a, b tại I, J thì IJ được gọi là đoạn vuông góc chung của a, b.**
- **Độ dài đoạn IJ được gọi là khoảng cách giữa a, b.**
- **Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó với mặt phẳng chứa đường thẳng kia và song song với nó.**
- **Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.**

VẤN ĐỀ 1: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Phương pháp: Dựng đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b.

Cách 1: Giả sử a ⊥ b:

- **Dựng mặt phẳng (P) chứa b và vuông góc với a tại A.**
- **Dựng AB ⊥ b tại B**

⇒ AB là đoạn vuông góc chung của a và b.

Cách 2: Sử dụng mặt phẳng song song.

- **Dựng mặt phẳng (P) chứa b và song song với a.**
- **Chọn M ∈ a, dựng MH ⊥ (P) tại H.**
- **Từ H dựng đường thẳng a′ // a, cắt b tại B.**
- **Từ B dựng đường thẳng song song MH, cắt a tại A.**

⇒ AB là đoạn vuông góc chung của a và b.

Chú ý: d(a,b) = AB = MH = a(a,(P)).

Cách 3: Sử dụng mặt phẳng vuông góc.

- **Dựng mặt phẳng (P) ⊥ a tại O.**
- **Dựng hình chiếu b′ của b trên (P).**
- **Dựng OH ⊥ b′ tại H.**
- **Từ H, dựng đường thẳng song song với a, cắt b tại B.**
- **Từ B, dựng đường thẳng song song với OH, cắt a tại A.**

⇒ AB là đoạn vuông góc chung của a và b.

Chú ý: d(a,b) = AB = OH.

§ 1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Dạng 1. XÁC ĐỊNH CÁC YẾU TỐ VỀ VECTƠ

I)CÁC ĐỊNH NGHĨA

1)Vec tơ , giá, độ dài của vec tơ

•Vec tơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.

•Giá của vec tơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vec tơ đó. Hai vec tơ gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau. Hai vec tơ cùng phương có thể cùng hướng hoặc ngược hướng.

•Độ dài của vec tơ là độ dài của đoạn thẳng có hai đầu mút là điểm đầu và điểm cuối của vec tơ đó.

2)Hai vec tơ bằng nhau, vec tơ -không

•$\vec{a},\vec{b}$ bằng nhau nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng. kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$

•Ve tơ- không là vec tơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau.

II)PHÉP CỘNG VÀ TRỪ VEC TƠ

1)Định nghĩa

•Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ .Trong không gian lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vec tơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$

•Vec tơ $\vec{b}$ là vec tơ đối của $\vec{a}$ nếu $|\vec{b}| = |\vec{a}|$ và $\vec{a}$, $\vec{b}$ ngược hướng. kí hiệu $\vec{a} = -\vec{b}$

•$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

2)Tính chất

•$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

•$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

•$\vec{a} + \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$

•$\vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = -\vec{a} + \vec{a} = \vec{0}$

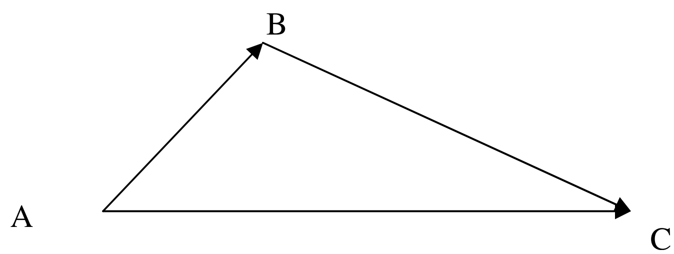
3)**Các quy tắc**

a)**Quy tắc 3 điểm**

Với ba điểm A,B,C bất kì ta có

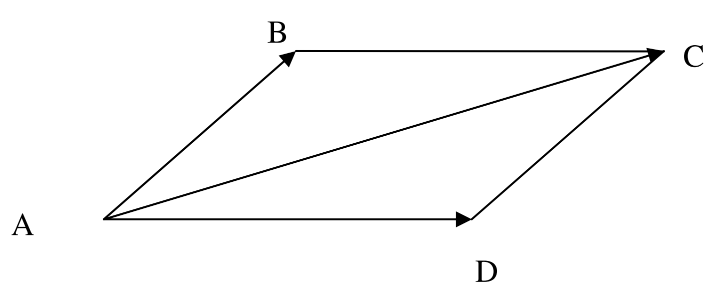
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$



b)**Quy tắc hình bình hành**

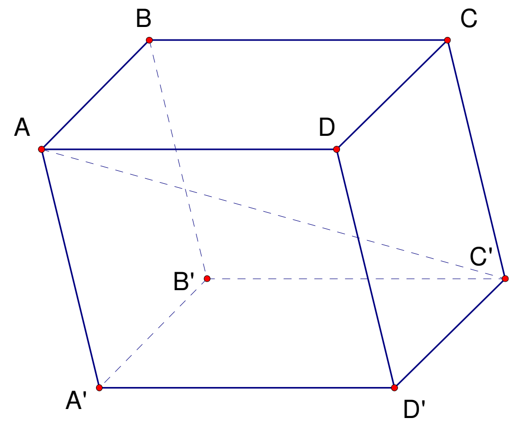
Với hình bình hành ABCD ta có



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

c)Quy tắc hình hộp

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$$



III)TÍCH CỦA VEC TƠ VỚI MỘT SỐ

1)Định nghĩa

Cho số k≠0 và vec tơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của vec tơ $\vec{a}$ với số k là một vec tơ, kí hiệu là $k.\vec{a}$, cùng hướng với $\vec{a}$ nếu k > 0, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu k<0 và có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$.

2)Tính chất

- $m\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = m\vec{a} + m\vec{b}$
- $(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$
- $m\left(n\vec{a}\right) = (mn)\vec{a}$
- $1.\vec{a} = \vec{a}$; $(-1).\vec{a} = -\vec{a}$
- $0.\vec{a} = \vec{0}$; $k.\vec{0} = \vec{0}$

Dạng 2. CHỨNG MINH CÁC ĐẲNG THỨC VỀ VECTƠ

- **Quy tắc 3 điểm**: với mọi A,B,C

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, (xen điểm B)

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$, hiệu hai vec tơ chung điểm đầu.

- **Quy tắc hình bình hành** : Với hình bình hành ABCD ta luôn có

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$

- **Quy tắc trung điểm** : I là trung điểm đoạn thẳng AB

$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2.\overrightarrow{MI}$, với mọi M

- **Trọng tâm tam giác**

G là trọng tâm tam giác ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3.\overrightarrow{MG}$ với mọi M

- **Trọng tâm tứ diện**

G là trọng tâm tứ diện ABCD $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4.\overrightarrow{MG}$, với mọi M

Dạng 3. VECTƠ CÙNG PHƯƠNG – VECTƠ ĐỒNG PHẲNG

1/ **Sự đồng phẳng của ba vectơ**

- Ba vectơ gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng .
- Nếu ta vẽ $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ thì $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng ⇔ 4 điểm O,A,B,C cùng nằm trên một mặt phẳng ⇔ 3 đường thẳng OA,OB,OC cùng nằm trên một mặt phẳng .

2/ **Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng**

- Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a},\vec{b}$. Khi đó ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có các số m,n sao cho : $\vec{c}=m.\vec{a}+n.\vec{b}$ .Ngoài ra các số m,n là duy nhất.
- Nếu $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ là ba vectơ không đồng phẳng thì với vectơ $\vec{d}$ bất kì ta đều tìm được các số m,n,p sao cho $\vec{d}=m\vec{a}+n.\vec{b}+p.\vec{c}$,ngoài ra m,n,p là duy nhất.

§ 2.HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

I/ **TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN**

1/ **Góc giữa vectơ trong không gian**

ĐỊNH NGHĨA

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác vectơ – không. Lấy một điểm A bất kì , gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB}=\vec{u},\overrightarrow{AC}=\vec{v}$. Khi đó ta gọi góc BAC ($0^0 \le$ góc BAC $\le 180^0$) là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ trong không gian và kí hiệu là $(\vec{u},\vec{v})$

2/ **Tích vô hướng của hai vectơ**

$\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos(\vec{u},\vec{v})$

3/ **Tính chất .**Với ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ bất kì trong không gian ta luôn có

- $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$
- $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$
- $(k\vec{a}).\vec{b}=k(\vec{a}.\vec{b})=\vec{a}.k\vec{b}$
- $\vec{a}^2 \ge 0; \vec{a}^2=0 \Leftrightarrow \vec{a}=\vec{0}$

4/ **Vectơ chỉ phương của đường thẳng**

- Vec tơ $\vec{a}\ne\vec{0}$ được gọi là vec tơ chỉ phương của đường thẳng d nếu giá của vec tơ $\vec{a}$ song song hoặc trùng với d.
- Nếu $\vec{a}$ là vec tơ chỉ phương của đường thẳng d thì vec tơ $k.\vec{a}$ với k≠0 cũng là vec tơ chỉ phương của d.
- Một đường thẳng a trong không gian hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm

A thuộc d và một vec tơ chỉ phương $\vec{a}$ của d.

5/ **Một số ứng dụng**

- Tính độ dài của đoạn thẳng AB: $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$
- Xác định góc giữa hai vec tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$: $\cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}$

II.GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Góc giữa hai đường thẳng a,b bất kì là góc giữa hai đường thẳng a',b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a và b.

III/ **Hai đường thẳng vuông góc**

- Hai đường thẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0.
- Nếu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ lần lượt là các vec tơ chỉ phương của hai đường thẳng a và b thì

$a \perp b \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

- Nếu a// b và c vuông góc với một trong hai đường thẳng đó thì c vuông góc với đường thẳng còn lại.

$\begin{cases} a // b \\ c \perp a \end{cases} \Rightarrow c \perp b$

Dạng1.TÍNH GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU a VÀ b.

- Góc giữa hai đường thẳng : Góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 là góc giữa hai đường thẳng Δ_1' và Δ_2' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với Δ_1 và Δ_2.
- Hai đường thẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0.

Dạng 2. TÍCH VÔ HƯỚNG HAI VECTƠ

Dùng các hệ thức

$\vec{a}.\vec{b} = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$, $\overrightarrow{a^2} = \left|\vec{a}\right|^2$

$\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$, $\vec{a}.\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$, $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$

---

§ 3.ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

1/ **Định nghĩa** : Đường thẳng d gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) .

2/ **Định lí** :Nếu một đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a,b cùng nằm trong mặt phẳng (P) thì đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P).
3/ **Liên hệ giữa quan hệ vuông góc và quan hệ song song**
TC1
a/ Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia .
b/ Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau
TC2
a/ Cho hai mặt phẳng song song .Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.
b/ Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với môt đường thẳng thì song song với nhau.
TC3
a/ Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với nhau .Đường thẳng nào vuông góc với (P) thì cũng vuông góc với a.
b/ Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.
4/ **Phép chiếu vuông góc và định lí ba đường vuông góc**
a/ Định nghĩa . Cho dường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α).Phép chiếu song song theo phương d lên mặt phẳng (α) được gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (α).
b/ **Định lí ba đường vuông góc.** Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) và b là đường thẳng không thuộc (α) đồng thời không vuông góc với (α). Gọi $b^{/}$ là hình chiếu vuông góc của b trên (α). Khi đó a vuông góc với b khi và chỉ khi a vuông góc với $b^{/}$.
c/ **Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng**
Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α).

- Nếu đường thẳng d vuông góc với (α) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng 90^0.
- Nếu đường thẳng d không vuông góc với mặt phẳng (α) thì góc giữa d và hình chiếu $d^{/}$ của nó trên (α) được gọi là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α).

Lưu ý . Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng không vượt quá 90^0.

Dạng 1. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG .

Muốn chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (α) ta sử dụng một trong hai cách sau:
Cách 1. Chứng minh a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α)
Cách 2. Chứng minh a song song với đường thẳng b mà b vuông góc với (α).

Dạng 2. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

- Muốn chứng minh đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b, ta tìm mặt phẳng (β)

chứa đường thẳng b sao cho việc chứng minh a vuông góc với (β) dễ thực hiện.
- Sử dụng định lí ba đường vuông góc.

Dạng 3. GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

- Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói góc giữa a và (P) bằng 90^0.
- Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên (P) gọi là góc giữa a và (P).

§ 4. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

I/ **GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG**

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng a,b lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

Cách tìm Góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β)

Cách 1.

Tìm giao tuyến d= $(\alpha)\cap(\beta)$

Tìm Ox $\subset(\alpha)$, Oy$\subset(\beta)$ cùng vuông góc với d tại O.

Nếu $x\hat{O}y \le 90^0$ thì đó là góc của (α) và (β)

Nếu $x\hat{O}y > 90^0$ thì góc của (α) và (β) bằng 180^0 - $x\hat{O}y$

Cách 2.Nếu (α) và (β) lần lượt chứa hai tam giác ACD, BCD có cùng cạnh đáy CD thì gọi I là trung điểm của CD ,ta có $AI \perp CD, BI \perp CD$.Từ đó tính góc AIB

Cách 3. Diện tích hình chiếu : $S' = S.\cos\alpha$.

II/ HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

1/ **Định nghĩa** .Hai mặt phẳng (α) và (β) gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa hai mặt phẳng đó là góc vuông.

2/ **Tính chất**

a/ Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc với nhau là mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

b/ Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất kì đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

c/ Cho hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau. Nếu từ một điểm thuộc mặt phẳng (α) ta dựng một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (β) thì đường thẳng này nằm trong mặt phẳng (α).

d/ Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

III/ **HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG, HÌNH HỘP CHỮ NHẬT, HÌNH LẬP PHƯƠNG**

Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với các mặt đáy.

Hình hộp chữ nhật là hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật.

Hình lập phương là hình lăng trụ đứng có đáy là hình vuông và các mặt bên đều là hình vuông.

IV/ **HÌNH CHÓP ĐỀU VÀ HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU**

Hình chóp đều là hình chóp có đáy là một đa giác đều có chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy.

Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một thiết diện song song với đáy cắt tất cả các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là hình chóp cụt đều.

Hai đáy của hình chóp cụt đều là hai đa giác đều đồng dạng với nhau.

Dạng 3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG .

Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc nhau. (P) cắt (Q) theo giao tuyến d

$$1/\begin{cases}(\alpha)\perp(\beta)\\(\alpha)\cap(\beta)=d\\a\subset(\beta)\\a\perp d\end{cases}\Rightarrow a\perp(\alpha)$$

$$2/\begin{cases}(\beta)\cap(\gamma)=a\\(\beta)\perp(\alpha)\\(\gamma)\perp(\alpha)\end{cases}\Rightarrow a\perp(\alpha)$$

§ 5. KHOẢNG CÁCH

I/ KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG, ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

1/ Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cho một điểm O và đường thẳng a. Trong mặt phẳng (O,a) gọi H là hình chiếu của O trên a. Khi đó khoảng cách giữa hai điểm O và H được gọi là khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a, kí hiệu là d(O,a).

2/ Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α) là khoảng cách giữa hai điểm O và H, với H là hình chiếu vuông góc của O trên (α), kí hiệu là d(O,(α)).

II/ KHOẢNG CÁCH GIỮA ĐƯỜNG THẲNG MẶT PHẲNG SONG SONG, GIỮA HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

1/ Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với a là khoảng cách một điểm bất kì thuộc a tới mặt phẳng (α), kí hiệu là d(a,(α)).

2/ Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (α) và (β) là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia, kí hiệu là d((α),(β)).

III/ ĐƯỜNG VUÔNG GÓC CHUNG VÀ KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

1/ Định nghĩa

a/ Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a, b và cùng vuông góc với mỗi đường

thẳng ấy được gọi là đường vuông góc chung của a và b.
b/ Nếu đường vuông góc chung Δ cắt cả hai đường thẳng chéo nhau a và b lần lượt tại M,N thì độ dài đoạn thẳng MN gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.

2/ Cách tìm đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau

Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Gọi (β) là mặt phẳng chứa b và song song với a, a' là hình chiếu vuông góc của a trên mặt phẳng (β).
Vì a// (β) nên $a // a'$. Do đó a' và b cắt nhau tại một điểm.
Gọi điểm này là N. Gọi (α) là mặt phẳng chứa a và a'.
Δ là đường thẳng đi qua N và vuông góc với (β). Khi đó (α) vuông góc voi (β).
Vậy Δ nằm trong (α) nên cắt đường thẳng b tại N, đồng thời Δ cùng vuông góc với cả a và b. Do đó Δ là đường vuông góc chung củ a và b.

3/ Nhận xét

a/ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó đến mặt phẳng song song với nó chứa đường thẳng kia.
b/ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song và lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

Dạng 1. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

Để tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (P), ta làm như sau:
- Dựng đoạn OH vuông góc với (P).
- Tính đoạn OH.

Dạng 2 .KHOẢNG CÁCH GIỮA MỘT ĐƯỜNG THẲNG VÀ MỘT MẶT PHẲNG SONG SONG – KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

1/ **Để tính khoảng cách từ đường thẳng a đến mp(P) song song với a :**
- Ta lấy một điểm M trên a.
- Tính khoảng cách từ điểm M đến (P).

2/ **Để tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q) :**
- Ta lấy điểm M tùy ý trên (P) .
- Tính khoảng cách từ M đến (Q).

Dạng 3. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG NẰM TRONG MỘT MẶT PHẲNG .

Tính khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a nằm trên mp(P):
- Vẽ OI vuông góc với (P) thì IH vuông góc a.
- Tính OI ,IH suy ra OH

Dạng 4.KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

Cách tìm đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b
Cách 1. Dùng mặt phẳng song song

- Dựng mp(P) qua b và song song với a.
- Lấy điểm M thuộc a, chiếu xuống (P) thành N
- Từ N dựng đường thẳng b // a , b cắt a tại I
- Từ I dựng đường thẳng song song với MN cắt a tại J thì IJ là đoạn vuông góc chung của a và b.

Cách 2. Dùng mặt phẳng vuông góc

- Dựng mp(P) vuông góc với a tại O.
- Chiếu b xuống (P) thành $b^{/}$.
- Dựng OH vuông góc $b^{/}$.
- Từ H dựng đường thẳng song song với a, cắt b tại J.
- Từ J dựng đường thẳng song song với OH, cắt a tại I thì IJ là đoạn vuông góc chung của a và b.

Cách 3.Nếu biết a vuông góc với b

- Dựng mp(P) qua b và vuông góc với a tại I.
- Trong (P) , dựng IJ vuông góc với b thì IJ là đoạn vuông góc chung.

Cách 4.Nếu tứ diện ABCD có hai cặp cạnh đối bằng nhau (AD=BC, AC=BD) thì đoạn vuông góc chung của cặp cạnh thứ ba (AB và CD) là đoạn thẳng nối trung điểm I, J của chúng.

Cách 5.Nếu có một đường thẳng d vuông góc với cả a và b thì d // IJ . Dựa vào mp(IJ,d) ta xác định vị trí của I và J.