DẠNG 1: DÃY SỐ MÀ CÁC SỐ HẠNG CÁCH ĐỀU.

Bài 1: Tính B = 1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99

Nhận xét: Nếu học sinh nào có sự sáng tạo sẽ thấy ngay tổng: 2 + 3 + 4 + ... + 98 + 99 có thể tính hoàn toàn tương tự như bài 1, cặp số ở giữa vẫn là 51 và 50, (vì tổng trên chỉ thiếu số 100) vậy ta viết tổng B như sau:

B = 1 + (2 + 3 + 4 + ... + 98 + 99). Ta thấy tổng trong ngoặc gồm 98 số hạng, nếu chia thành các cặp ta có 49 cặp nên tổng đó là: (2 + 99) + (3 + 98) + ... + (51 + 50) = 49.101 = 4949, khi đó B = 1 + 4949 = 4950

Lời bình: Tổng B gồm 99 số hạng, nếu ta chia các số hạng đó thành cặp (mỗi cặp có 2 số hạng thì được 49 cặp và dư 1 số hạng, cặp thứ 49 thì gồm 2 số hạng nào? Số hạng dư là bao nhiêu?), đến đây học sinh sẽ bị vướng mắc.

Ta có thể tính tổng B theo cách khác như sau:

<u>Cách 2:</u>

$$
\begin{array}{rl}
 & B = 1 + 2 + 3 + ... + 97 + 98 + 99 \\
+ & \\
 & B = 99 + 98 + ... + \quad 3 + 2 + 1 \\
\hline
 & 2B = 100 + 100 + ... + 100 + 100 + 100
\end{array}
$$

$$2B = 100.99 \Rightarrow B = 50.99 = 4950$$

Bài 2: Tính C = 1 + 3 + 5 + ... + 997 + 999

Lời giải:

<u>Cách 1:</u> Từ 1 đến 1000 có 500 số chẵn và 500 số lẻ nên tổng trên có 500 số lẻ. Áp dụng các bài trên ta có C = (1 + 999) + (3 + 997) + ... + (499 + 501) = 1000.250 = 250.000 (Tổng trên có 250 cặp số)

<u>Cách 2:</u> Ta thấy:

$$
\begin{aligned}
1 &= 2.1 - 1 \\
3 &= 2.2 - 1 \\
5 &= 2.3 - 1 \\
&... \\
999 &= 2.500 - 1
\end{aligned}
$$

Quan sát vế phải, thừa số thứ 2 theo thứ tự từ trên xuống dưới ta có thể xác định được số các số hạng của dãy số C là 500 số hạng.

Áp dụng cách 2 của bài trên ta có:

$$\begin{array}{rl} & C \;=\; 1 + 3 + ... + 997 + 999 \\ + & \\ & C \;=\; 999 + 997 + ... + \;\; 3 + 1 \\ \hline & 2C = 1000 + 1000 + ... + 1000 + 1000 \end{array}$$

$$2C = 1000.500 \;\Rightarrow\; C = 1000.250 = 250.000$$

Bài 3. Tính D = 10 + 12 + 14 + ... + 994 + 996 + 998

Nhận xét: Các số hạng của tổng D đều là các số chẵn, áp dụng cách làm của bài tập 3 để tìm số các số hạng của tổng D như sau:

Ta thấy:

$$\begin{aligned} 10 &= 2.4 + 2 \\ 12 &= 2.5 + 2 \\ 14 &= 2.6 + 2 \\ &... \\ 998 &= 2.498 + 2 \end{aligned}$$

Tương tự bài trên: từ 4 đến 498 có 495 số nên ta có số các số hạng của D là 495, mặt khác ta lại thấy: $495 = \frac{998-10}{2} + 1$ hay

số các số hạng = (số hạng đầu - số hạng cuối) : khoảng cách rồi cộng thêm 1

Khi đó ta có:

$$\begin{array}{rl} & D \;=\; 10 + 12 + ... + 996 + 998 \\ + & \\ & D \;=\; 998 + 996 + ... + \;\; 12 + 10 \\ \hline & 2D = 1008 + 1008 + ... + 1008 + 1008 \end{array}$$

$$2D = 1008.495 \;\Rightarrow\; D = 504.495 = 249480$$

Thực chất $D = \frac{(998+10)495}{2}$

Qua các ví dụ trên , ta rút ra một cách tổng quát như sau: Cho dãy số cách đều $u_1, u_2, u_3, ... u_n$ (*), khoảng cách giữa hai số hạng liên tiếp của dãy là d,

Khi đó số các số hạng của dãy (*) là: $n = \frac{u_n - u_1}{d} + 1$ (1)

Tổng các số hạng của dãy (*) là $S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$ (2)

Đặc biệt từ công thức (1) ta có thể tính được số hạng thứ n của dãy (*) là: $u_n = u_1 + (n - 1)d$

Hoặc khi $u_1 = d = 1$ thì $S_1 = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Bài 4. Tính E = 10,11 + 11,12 + 12,13 + ...+ 98,99 + 99,10

Lời giải

Ta có thể đưa các số hạng của tổng trên về dạng số tự nhiên bằng cách nhân cả hai vế với 100, khi đó ta có:

100E = 1011 + 1112 + 1213 + ... + 9899 + 9910 = (1011 + 1112 + 1213 + ... + 9899) + 9910 $= \frac{(1011+9899).98}{2} + 9910 = 485495 + 9910 = 495405 \Rightarrow$

E = 4954,05

(Ghi chú: Vì số các số hạng của dãy là $\frac{(9899-1011)}{101} + 1 = 98$)

Bài 5. Phân tích số 8030028 thành tổng của 2004 số tự nhiên chẵn liên tiếp.

Lời giải

Gọi a là số tự nhiên chẵn, ta có tổng của 2004 số tự nhiên chẵn liên tiếp là:

S = a + (a + 2) + ... + (a + 4006) = $\left[\frac{a+(a+4006)}{2}\right].2004 = (a+2003).2004$. Khi đó ta có: (a + 2003).2004 = 8030028 $\Leftrightarrow$ a = 2004.

Vậy ta có: 8030028 = 2004 + 2006 + 2008 + ... + 6010

Nhận xét:

Sau khi giải quyết các bài toán ở dạng trên ta không thấy có vướng mắc gì lớn, bởi vì đó là toàn bộ những bài toán cơ bản mà đối với học sinh khá cũng không gặp mấy khó khăn khi tiếp thu. Tuy nhiên đó là các cơ sở đầu tiên để từ đó chúng ta tiếp tục nghiên cứu các dạng toán ở mức độ cao hơn, phức tạp hơn một chút.

DẠNG 2: DÃY SỐ MÀ CÁC SỐ HẠNG KHÔNG CÁCH ĐỀU.

Bài 1. Tính A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + … + n.(n + 1)

Lời giải

Ta thấy mỗi số hạng của tổng trên là tích của hai số tự nhên liên tiếp, khi đó:

Gọi $a_1 = 1.2 \Rightarrow 3a_1 = 1.2.3 \Rightarrow 3a_1 = 1.2.3 - 0.1.2$

$a_2 = 2.3 \Rightarrow 3a_2 = 2.3.3 \Rightarrow 3a_2 = 2.3.4 - 1.2.3$

$a_3 = 3.4 \Rightarrow 3a_3 = 3.3.4 \Rightarrow 3a_3 = 3.4.5 - 2.3.4$

…………………..

$a_{n-1} = (n - 1)n \Rightarrow 3a_{n-1} = 3(n - 1)n \Rightarrow 3a_{n-1} = (n - 1)n(n + 1) - (n - 2)(n - 1)n$

$a_n = n(n + 1) \Rightarrow 3a_n = 3n(n + 1) \Rightarrow 3a_n = n(n + 1)(n + 2) - (n - 1)n(n + 1)$

Cộng từng vế của các đẳng thức trên ta có:

$3(a_1 + a_2 + … + a_n) = n(n + 1)(n + 2)$

$3\left[1.2+2.3+...+n(n+1)\right] = n(n + 1)(n + 2) \Rightarrow A = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

<u>Cách 2</u>: Ta có

3A = 1.2.3 + 2.3.3 + … + n(n + 1).3 = 1.2.(3 - 0) + 2.3.(3 - 1) + … + n(n + 1)[(n - 2) - (n - 1)] = 1.2.3 - 1.2.0 + 2.3.3 - 1.2.3 + … + n(n + 1)(n + 2) -

- (n - 1)n(n + 1) = n(n + 1)(n + 2) $\Rightarrow$ A = $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

* Tổng quát hoá ta có:

k(k + 1)(k + 2) - (k - 1)k(k + 1) = 3k(k + 1). Trong đó k = 1; 2; 3; …

Ta dễ dàng chứng minh công thức trên như sau:

k(k + 1)(k + 2) - (k - 1)k(k + 1) = k(k + 1)[(k + 2) - (k - 1)] = 3k(k + 1)

Bài 2. Tính B = 1.2.3 + 2.3.4 + … + (n - 1)n(n + 1)

Lời giải

Áp dụng tính kế thừa của bài 1 ta có:

4B = 1.2.3.4 + 2.3.4.4 + … + (n - 1)n(n + 1).4

= 1.2.3.4 - 0.1.2.3 + 2.3.4.5 - 1.2.3.4 + … + (n - 1)n(n + 1)(n + 2) - [(n - 2)(n - 1)n(n + 1)] = (n - 1)n(n + 1)(n + 2) - 0.1.2.3 = (n - 1)n(n + 1)(n + 2)

$\Rightarrow B = \dfrac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}$

Bài 3. Tính C = 1.4 + 2.5 + 3.6 + 4.7 + … + n(n + 3)

Lời giải

Ta thấy: 1.4 = 1.(1 + 3)

2.5 = 2.(2 + 3)

3.6 = 3.(3 + 3)

4.7 = 4.(4 + 3)

…….

n(n + 3) = n(n + 1) + 2n

Vậy C = 1.2 + 2.1 + 2.3 + 2.2 + 3.4 + 2.3 + … + n(n + 1) +2n

= 1.2 + 2 +2.3 + 4 + 3.4 + 6 + … + n(n + 1) + 2n

= [1.2 +2.3 +3.4 + … + n(n + 1)] + (2 + 4 + 6 + … + 2n)

3C = 3.[1.2 +2.3 +3.4 + … + n(n + 1)] + 3.(2 + 4 + 6 + … + 2n) =

= 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + … + n(n + 1).3 + 3.(2 + 4 + 6 + … + 2n) =

= n(n + 1)(n + 2) + $\frac{3(2n+2)n}{2}$ $\Rightarrow$ C= $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}+\frac{3(2n+2)n}{2}=\frac{n(n+1)(n+5)}{3}$

Bài 4. Tính D = $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$

<u>Nhận xét:</u> Các số hạng của bài 1 là tích của hai số tự nhiên liên tiếp, còn ở bài này là tích của hai số tự nhiên giống nhau. Do đó ta chuyển về dạng bài tập 1:

Ta có: A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + … + n.(n + 1) = 1.(1 + 1) + 2.(1 + 2) + … + + n.(1 + n) = 1^2 + 1.1 + 2^2 + 2.1 + 3^2 + 3.1 + … + n^2 + n.1 = ($1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$) + (1 + 2 + 3 + … + n). Mặt khác theo bài tập 1 ta có:

A = $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ và 1 + 2 + 3 + … + n = $\frac{n(n+1)}{2}$ $\Rightarrow$ $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ =

= $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ - $\frac{n(n+1)}{2}$ = $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Bài 5. Tính E = $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$

Lời giải

Tương tự bài toán trên, xuất phát từ bài toán 2, ta đưa tổng B về tổng E: Ta có:

B = 1.2.3 + 2.3.4 + … + (n - 1)n(n + 1) = (2 - 1).2.(2 + 1) + (3 - 1).3.(3 + 1) + … + (n - 1)n(n + 1) = (2^3 - 2) + (3^3 - 3) + … + (n^3 - n) =

= ($2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$) - (2 + 3 + … + n) = ($1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$) -

- (1 + 2 + 3 + … + n) = ($1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$) - $\frac{n(n+1)}{2}$ $\Rightarrow$

($1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$) = B + $\frac{n(n+1)}{2}$ Mà ta đã biết B = $\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}$

$\Rightarrow$ E = $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 =$

$$= \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4} + \frac{n(n+1)}{2} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

<u>Cách 2:</u> Ta có:

$A_1 = 1^3 = 1^2$

$A_2 = 1^3 + 2^3 = 9 = (1 + 2)^2$

$A_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = (1 + 2 + 3)^2$

Giả sử có: $A_k = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + k)^2$ (1) Ta chứng minh:

$A_{k+1} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (k + 1)^3 = [1 + 2 + 3 + \ldots + (k + 1)]^2$ (2)

Thật vậy, ta đã biết: $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ $\Rightarrow$

$A_k = [\frac{k(k+1)}{2}]^2$ (1') Cộng vào hai vế của (1') với $(k + 1)^3$ ta có:

$A_k + (k + 1)^3 = [\frac{k(k+1)}{2}]^2 + (k + 1)^3 \Leftrightarrow A_{k+1} = [\frac{k(k+1)}{2}]^2 + (k + 1)^3$

$= \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$ Vậy tổng trên đúng với A_{k+1}, tức là ta luôn có:

$A_{k+1} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (k + 1)^3 = [1 + 2 + 3 + \ldots + (k + 1)]^2 =$

$= \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$. Vậy khi đó ta có:

$E = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

<u>Lời bình:</u> - Với bài tập trên ta áp dụng kiến thức về quy nạp Toán học.

- Bài tập trên chính là dạng bài tập về tổng các số hạng của một cấp số nhân (lớp 11) nhưng chúng ta có thể giải quyết được trong phạm vi ở cấp THCS.

Bài 6. (Trang 23 SGK Toán 7 tập 1)

Biết rằng $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2 = 385$, đố em tính nhanh được tổng

$S = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + 20^2$

Lời giải

Ta có: $S = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + 20^2 = (2.1)^2 + (2.2)^2 + \ldots + (2.10)^2 =$

$= 1^2.2^2 + 2^2.2^2 + 2^2.3^2 + \ldots + 2^2.10^2 = 2^2.(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2) = 4.(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2) = 4.385 = 1540$.

Nhận xét: Nếu đặt $P = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2$ thì ta có: S = 4.P. Do đó, nếu cho S thì ta sẽ tính được P và ngược lại. Tổng quát hóa ta có:

$P = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (theo kết quả ở trên)

Khi đó $S = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2$ được tính tương tự như bài trên, ta có:

$S = (2.1)^2 + (2.2)^2 + \ldots + (2.n)^2 = 4.(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) =$

$= \dfrac{4n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

Còn: $P = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$. Ta tính $S = 2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + (2n)^3$ như sau: $S = (2.1)^3 + (2.2)^3 + (2.3)^3 + \ldots + (2.n)^3 = 8.(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3)$ lúc này S = 8P, Vậy ta có: $S = 2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + (2n)^3 = 8\cdot\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \dfrac{8.n^2(n+1)^2}{4} = 2n^2(n+1)^2$

Áp dụng các kết quả trên, ta có bài tập sau:

Bài 7. a) Tính $A = 1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2$

b) Tính $B = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3$

Lời giải

a)Theo kết quả bài trên, ta có: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (2n)^2 =$

$= \dfrac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} = \dfrac{n(2n+1)(4n+1)}{3}$

Mà ta thấy:

$1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (2n)^2 - [2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + (2n)^2] =$

$= \dfrac{n(2n+1)(4n+1)}{3} - \dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3} = \dfrac{2n^2(2n+1)}{3}$

b) Ta có: $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (2n)^3 -$

$- [2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + (2n)^3]$. Áp dụng kết quả bài tập trên ta có:

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (2n)^3 = n^2(2n+1)^2$.

Vậy: $B = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2 =$

$= 2n^4 - n^2$

Ngày dạy: 20/9/2009

MỘT SỐ BÀI TẬP DẠNG KHÁC

Bài 1. Tính $S_1 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63}$

Lời giải

Cách 1:

Ta thấy: $S_1 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63}$ (1)

$\Rightarrow 2S_1 = 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63} + 2^{64}$ (2)

Trừ từng vế của (2) cho (1) ta có:

$2S_1 - S_1 = 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63} + 2^{64} - (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63})$

$= 2^{64} - 1$. Hay $S_1 = 2^{64} - 1$

Cách 2:

Ta có: $S_1 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63} = 1 + 2(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{62})$ (1)

$= 1 + 2(S_1 - 2^{63}) = 1 + 2S_1 - 2^{64} \Rightarrow S_1 = 2^{64} - 1$

Bài 2. Tính giá trị của biểu thức $S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{2000}$ (1)

Lời giải:

Cách 1: Áp dụng cách làm của bài 1:

Ta có: $3S = 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{2001}$ (2) Trừ từng vế của (2) cho (1) ta được:

$3S - 2S = (3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{2001}) - (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{2000})$

Hay: $2S = 3^{2001} - 1 \Rightarrow S = \dfrac{3^{2001} - 1}{2}$

Cách 2: Tương tự như cách 2 của bài trên:

Ta có: $S = 1 + 3(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{1999}) = 1 + 3(S - 3^{2000}) = 1 + 3S - 3^{2001}$

$\Rightarrow 2S = 3^{2001} - 1 \Rightarrow S = \dfrac{3^{2001} - 1}{2}$

*) Tổng quát hoá ta có:

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n \quad (1)$$

Khi đó ta có:

Cách 1: $qS_n = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n+1}$ (2)

Trừ từng vế của (2) cho (1) ta có: $(q - 1)S = q^{n+1} - 1 \Rightarrow S = \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$

Cách 2: $S_n = 1 + q(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1}) = 1 + q(S_n - q^n)$

$= 1 + qS_n - q^{n+1} \Rightarrow qS_n - S_n = q^{n+1} - 1$ hay: $S_n(q - 1) = q^{n+1} - 1$

$\Rightarrow S = \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$

Bài 3. Cho $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^9$; $B = 5.2^8$. Hãy so sánh A và B

Cách 1: Ta thấy: $B = 5.2^8 = (2^3 + 2^2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1).2^6$

$$= 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^6 + 2^6 + 2^6 + 2^6 + 2^6 + 2^6$$

$$= 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^6 + 2^6 + 2^6 + 2^6 + 2^6 + 2^5 + 2^5$$

(Vì $2^6 = 2.2^5$). Vậy rõ ràng ta thấy $B > A$

Cách 2: Áp dụng cách làm của các bài tập trên ta thấy đơn giản hơn, thật vậy:

$$A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^9 \qquad (1)$$

$$2A = 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^9 + 2^{10} \qquad (2)$$

Trừ từng vế của (2) cho (1) ta có:

$$2A - A = (2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^9 + 2^{10}) - (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^9)$$

$$= 2^{10} - 1 \text{ hay } A = 2^{10} - 1$$

Còn: $B = 5.2^8 = (2^2 + 1).2^8 = 2^{10} + 2^8$

Vậy $B > A$

* Ta có thể tìm được giá trị của biểu thức A, từ đó học sinh có thể so sánh được A với B mà không gặp mấy khó khăn.

Bài 4. Tính giá trị của biểu thức $S = 1 + 2.6 + 3.6^2 + 4.6^3 + \ldots + 100.6^{99}$ (1)

Ta có: $6S = 6 + 2.6^2 + 3.6^3 + \ldots + 99.6^{99} + 100.6^{100}$ (2)

Trừ từng vế của (2) cho (1) ta được:

$$5S = 6 - 2.6 + (2.6^2 - 3.6^2) + (3.6^3 - 4.6^3) + \ldots + (99.6^{99} - 100.6^{99}) +$$

$$+ 100.6^{100} - 1 = 100.6^{100} - 1 - (6 + 6^2 + 6^3 + \ldots + 6^{99}) \quad (*)$$

Đặt $S' = 6 + 6^2 + 6^3 + \ldots + 6^{99} \Rightarrow 6S' = 6^2 + 6^3 + \ldots + 6^{99} + 6^{100} \Rightarrow$

$\Rightarrow S' = \dfrac{6^{100} - 6}{5}$ thay vào (*) ta có: $5S = 100.6^{100} - 1 - \dfrac{6^{100} - 6}{5} = \dfrac{499.6^{100} + 1}{5}$

$$\Rightarrow S = \frac{499.6^{100} + 1}{25}$$

Bài 5. Người ta viết dãy số: 1; 2; 3; ... Hỏi chữ số thứ 673 là chữ số nào?

Lời giải

Ta thấy: Từ 1 đến 99 có: 9 + 2.90 = 189 chữ số, theo đầu bài ta còn thiếu số các chữ số của dãy là: 673 - 189 = 484 chữ số, như vậy chữ số thứ 673 phải nằm trong dãy các số có 3 chữ số. Vậy ta xét tiếp:

Từ 100 đến 260 có: 3.161 = 483 chữ số

Như vậy từ 1 đến 260 đã có: 189 + 483 = 672 chữ số, theo đầu bài thì chữ số thứ 673 sẽ là chữ số 2 của số 261.

Một số bài tập tự giải:

1. Tính: A = 1.2.3.4 + 2.3.4.5 + … + (n - 2) … (n + 1)
2. Tính: B = 1.2.4 + 2.3.5 + … + n(n + 1)(n + 3)
3. Tính: $C = 2^2 + 5^2 + 8^2 + ...+ (3n - 1)^2$
4. Tính: $D = 1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + n^4$
5. Tính: $E = 7 + 7^4 + 7^7 + 7^{10} + \ldots + 7^{3001}$
6. Tính: $F = 8 + 8^3 + 8^5 + \ldots + 8^{801}$
7. Tính: G = 9 + 99 + 999 + … + 99 … 9 (chữ số cuối gồm 190 chữ số 9)
8. Tính: H = 1.1! + 2.2! + … + n.n!
9. Cho dãy số: 1; 2; 3; … . Hỏi chữ số thứ 2007 là chữ số nào?

****

THỂ LOẠI TOÁN VỀ PHÂN SỐ:

Bài 1. Tính giá trị của biểu thức A = $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{(n-1).n}$

Lời giải

Ta có: A = $\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$sau khi bỏ dấu ngoặc ta có:

A = $1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}$

Nhận xét: Ta thấy các giá trị ở tử không thay đổi và chúng và đúng bằng hiệu hai thừa số ở mẫu. Mỗi số hạng đều có dạng: $\frac{m}{b(b+m)}=\frac{1}{b}-\frac{1}{b+m}$ (Hiệu hai thừa số ở mẫu luôn bằng giá trị ở tử thì phân số đó luôn viết được dưới dạng hiệu của hai phân số khác với các mẫu tương ứng). Nên ta có một tổng với các đặc điểm: các số hạng liên tiếp luôn đối nhau (số trừ của nhóm trước bằng số bị trừ của nhóm sau liên tiếp), cứ như vậy các số hạng trong tổng đều được khử liên tiếp, đến khi trong tổng chỉ còn số hạng đầu và số hạng cuối, lúc đó ta thực hiện phép tính sẽ đơn giản hơn.

Bài 2. Tính giá trị của biểu thức B = $\frac{4}{3.7}+\frac{4}{7.11}+\frac{4}{11.15}+...+\frac{4}{95.99}$

B = $\left(\frac{4}{3.7}+\frac{4}{7.11}+\frac{4}{11.15}+...+\frac{4}{95.99}\right)$ vận dụng cách làm của phần nhận xét, ta có: 7 - 3 = 4 (đúng bằng tử) nên ta có:

B = $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{15}+...+\frac{1}{95}-\frac{1}{99}\right)=$ $\frac{1}{3}-\frac{1}{99}=\frac{32}{99}$

Bài 3. Tính giá trị của biểu thức C = $\frac{7^2}{2.9}+\frac{7^2}{9.16}+\frac{7^2}{16.23}+...+\frac{7^2}{65.72}$

Nhận xét: Ta thấy: 9 - 2 = 7 ≠ 7^2 ở tử nên ta không thể áp dụng cách làm của các bài trên (ở tử đều chứa 7^2), nếu giữ nguyên các phân số đó thì ta không thể tách được thành hiệu các phân số khác để rút gọn tổng trên được. Mặt khác ta thấy: $\frac{7}{2.9}=\frac{1}{2}-\frac{1}{9}$, vì vậy để giải quyết được vấn đề ta phải đặt 7 làm thừa số chung ra ngoài dấu ngoặc, khi đó thực hiện bên trong ngoặc sẽ đơn giản.

Vậy ta có thể biến đổi:

$$C = 7.\left(\frac{7}{2.9}+\frac{7}{9.16}+\frac{7}{16.23}+...+\frac{7}{65.72}\right) =$$

$$7.\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}-\frac{1}{23}+...+\frac{1}{65}-\frac{1}{72}\right)=$$

$$= 7.\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{72}\right)=7.\frac{35}{72}=3\frac{29}{72}$$

Bài 4. Tính giá trị của biểu thức D = $\frac{3}{1.3}+\frac{3}{3.5}+\frac{3}{5.7}+...+\frac{3}{49.51}$

Lời giải

Ta lại thấy: 3 - 1 = 2 ≠ 3 ở tử của mỗi phân số trong tổng nên bằng cách nào đó ta đưa 3 ra ngoài và đưa 2 vào trong thay thế.

Ta có: $D = \frac{2}{2}\left(\frac{3}{1.3}+\frac{3}{3.5}+\frac{3}{5.7}+...+\frac{3}{49.51}\right)= \frac{3}{2}\left(\frac{2}{1.3}+\frac{2}{3.5}+\frac{2}{5.7}+...+\frac{2}{49.51}\right)$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+\frac{1}{49}-\frac{1}{51}\right)= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{51}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{50}{51}=\frac{25}{17}$$

Bài 5. Tính giá trị của biểu thức E = $\frac{1}{7}+\frac{1}{91}+\frac{1}{247}+\frac{1}{475}+\frac{1}{775}+\frac{1}{1147}$

Lời giải

Ta thấy: 7 = 1.7 ; 91 = 13.7 ; 247 = 13.19 ; 475 = 19.25

775 = 25.31 ; 1147 = 31.37

Tương tự bài tập trên ta có:

$$E = \frac{1}{6}\left(\frac{6}{1.7}+\frac{6}{7.13}+\frac{6}{13.19}+\frac{6}{19.25}+\frac{6}{25.31}+\frac{6}{31.37}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{13}+\frac{1}{13}-\frac{1}{19}+\frac{1}{19}-\frac{1}{25}+\frac{1}{25}-\frac{1}{31}+\frac{1}{31}-\frac{1}{37}\right)= \frac{1}{6}\cdot\left(1-\frac{1}{37}\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{36}{37}=\frac{6}{37}$$

Bài 6. *(Đề thi chọn HSG Toán 6 - TX Hà Đông - Hà Tây - Năm học 2002 - 2003)*

So sánh: A = $\frac{2}{60.63}+\frac{2}{63.66}+...+\frac{2}{117.120}+\frac{2}{2003}$ và

B = $\frac{5}{40.44}+\frac{5}{44.48}+...+\frac{5}{76.80}+\frac{5}{2003}$

Lời giải

Lại áp dụng cách làm ở bài trên ta có: A=

$\frac{2}{3}\left(\frac{3}{60.63}+\frac{3}{63.66}+...+\frac{3}{117.120}\right)+\frac{2}{2003}=$

$=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{60}-\frac{1}{63}+\frac{1}{63}-\frac{1}{66}+...+\frac{1}{117}-\frac{1}{200}\right)+\frac{2}{2003}=$

$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{60}-\frac{1}{120}\right)+\frac{2}{2003}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{120}+\frac{2}{2003}=$

$=\frac{1}{180}+\frac{2}{2003}$

Tương tự cách làm trên ta có:

$B=\frac{5}{4}\left(\frac{1}{40}-\frac{1}{80}\right)+\frac{5}{2003}=\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{80}+\frac{5}{2003}=\frac{1}{64}+\frac{5}{2003}$

Ta lại có: $2A=2\left(\frac{1}{180}+\frac{2}{2003}\right)=\frac{2}{180}+\frac{4}{2003}=\frac{1}{90}+\frac{4}{2003}$ Từ đây ta thấy ngay

$B > 2A$ thì hiển nhiên $B > A$

Bài 7. *(Đề thi chọn HSG Toán năm học 1985 - 1986)*

So sánh hai biểu thức A và B:

$A=124\left(\frac{1}{1.1985}+\frac{1}{2.1986}+\frac{1}{3.1987}+...+\frac{1}{16.2000}\right)$

$B=\frac{1}{1.17}+\frac{1}{2.18}+\frac{1}{3.19}+...+\frac{1}{1984.2000}$

Lời giải

Ta có: $A=\frac{124}{1984}.\left(1-\frac{1}{1985}+\frac{1}{2}-\frac{1}{1986}+\frac{1}{3}-\frac{1}{1987}+...+\frac{1}{16}-\frac{1}{2000}\right)=$

$=\frac{1}{16}.\left[\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{16}\right)-\left(\frac{1}{1985}+\frac{1}{1986}+...+\frac{1}{2000}\right)\right]$

Còn B =

$\frac{1}{16}.\left[\left(1-\frac{1}{17}+\frac{1}{2}-\frac{1}{18}+...+\frac{1}{1984}-\frac{1}{2000}\right)\right]=$

$\frac{1}{16}.\left[\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{1984}\right)-\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+...+\frac{1}{2000}\right)\right]=$

=

$$\frac{1}{16}.\left[\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+...+\frac{1}{1984}-\frac{1}{17}-\frac{1}{18}-...-\frac{1}{1984}\right)-\left(\frac{1}{1985}+...+\frac{1}{2000}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left[\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{16}\right)-\left(\frac{1}{1985}+\frac{1}{1986}+...+\frac{1}{2000}\right)\right]$$

Vậy A = B

****

THỂ LOẠI TOÁN VỀ PHÂN SỐ (TIẾP)

Bài 8. Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{25}+...+\frac{1}{n^2+\left(n+1\right)^2}<\frac{1}{2}$ với mọi n $\in$ N

Lời giải

Ta không thể áp dụng ngay cách làm của các bài tập trên, mà ta thấy:

$\frac{1}{5}<\frac{2}{2.4};\frac{1}{13}<\frac{2}{4.6};\frac{1}{25}<\frac{2}{6.8}$... ta phải so sánh: $\frac{1}{n^2+(n+1)^2}$ với: $\frac{2}{2n(2n+1)}$

Thật vậy: $\frac{1}{n^2+(n+1)^2} = \frac{1}{n^2+(n+1)^2}=\frac{1}{2n^2+2n+1}$ còn

$\frac{2}{2n(2n+2)}=\frac{1}{n(2n+2)}=\frac{1}{2n^2+2n}$

nên hiển nhiên $\frac{1}{n^2+(n+1)^2}<\frac{2}{2n(2n+1)}$ $\forall n\in N$.

Vậy ta có: $\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{25}+...+\frac{1}{n^2+\left(n+1\right)^2}<\frac{2}{2.4}+\frac{2}{4.6}+\frac{2}{6.8}+...+\frac{2}{2n(2n+2)}$

Mà: $\frac{2}{2.4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4};\frac{2}{4.6}=\frac{1}{4}-\frac{1}{6};\frac{2}{6.8}=\frac{1}{6}-\frac{1}{8}...\frac{2}{2n(2n+2)}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}$ nên:

$\frac{2}{2.4}+\frac{2}{4.6}+\frac{2}{6.8}+...+\frac{2}{2n(2n+2)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}...+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+2}<\frac{1}{2}$

là hiển nhiên với mọi số tự nhiên n

Vậy: $\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{25}+...+\frac{1}{n^2+(n+1)^2}<\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}...+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}$ hay

$\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{25}+...+\frac{1}{n^2+(n+1)^2}<\frac{1}{2}$

Bài 9. Tính giá trị của biểu thức M = $\frac{3}{(1.2)^2}+\frac{5}{(2.3)^2}+...+\frac{2n+1}{\left[n(n+1)\right]^2}$

Lời giải

Ta có ngay: M = $\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$

$= 1-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} =$

$\frac{(n+1)(n+1)-1}{(n+1)^2}=\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}=\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$

Bài 10. Tính giá trị của biểu thức N = $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Lời giải

Ta có: N = $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{1.2.3}+\frac{2}{2.3.4}+\frac{2}{3.4.5}+...+\frac{2}{n.(n+1)(n+2)}\right)$

=

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}+\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}+...+\frac{1}{n.(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$

= $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$

Bài 11. Tính giá trị của biểu thức: H = $\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+...+\frac{1}{(n-1).n(n+1)(n+2)}$

Lời giải

Ta có: H = $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{1.2.3.4}+\frac{3}{2.3.4.5}+...+\frac{3}{(n-1).n.(n+1).(n+2)}\right)$

=

$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{2.3.4}-\frac{1}{3.4.5}+...+\frac{1}{(n-1).n.(n+1)}-\frac{1}{n.(n+1).(n+2)}\right)$

= $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$

Bài 12. Chứng minh rằng P = $\frac{12}{1.4.7}+\frac{12}{4.7.10}+\frac{12}{7.10.12}+...+\frac{12}{54.57.60}<\frac{1}{2}$

Lời giải

Ta có: P = $2.\left(\frac{6}{1.4.7}+\frac{6}{4.7.10}+\frac{6}{7.10.13}+...+\frac{6}{54.57.60}\right)$

= $2.\left(\frac{1}{1.4}-\frac{1}{4.7}+\frac{1}{4.7}-\frac{1}{7.10}+\frac{1}{7.10}-\frac{1}{10.13}+...+\frac{1}{54.57}-\frac{1}{57.60}\right)=$

= $2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{57.60}\right)=2\cdot\frac{854}{3420}=\frac{427}{855}<\frac{427}{854}=\frac{1}{2}$. Vậy P < $\frac{1}{2}$

Bài 13. Chứng minh rằng S = $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{100^2}<2$

Lời giải

Ta thấy: $\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1.2};\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2.3};\frac{1}{4^2}<\frac{1}{3.4}...\frac{1}{100^2}<\frac{1}{99.100}$ Áp dụng cách làm bài tập trên ta có:

S < $1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{99.100}<1+1-\frac{1}{100}<2$ hay S < 2

Bài 14. Đặt $A=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{2005.2006}$

$B=\frac{1}{1004.2006}+\frac{1}{1005.2006}+...+\frac{1}{2006.1004}$. Chứng minh rằng $\frac{A}{B}\in Z$

Lời giải

Áp dụng các bài trên, ta có:

$$A=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{2005.2006}= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2005}-\frac{1}{2006}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2005}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{2006}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2006}\right)-2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2006}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2006}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{1003}\right)=$$

$$\frac{1}{1004}+\frac{1}{1005}+...+\frac{1}{2006}$$

Còn $B=\frac{2}{3010}\left(\frac{1}{1004}+\frac{1}{1005}+...+\frac{1}{2006}\right)\Rightarrow\frac{A}{B}=\frac{3010}{2}=1505\in Z$

Như vậy, ở phần này ta đã giải quyết được một lượng lớn các bài tập về dãy số ở dạng phân số. Tuy nhiên đó là các bài tập nhìn chung không hề đơn giản. Vì vậy để áp dụng có hiệu quả thì chúng ta cần linh hoạt trong việc biến đổi theo các hướng sau:

1 - Nếu mẫu là một tích thì bằng mọi cách biến đổi thành hiệu các phân số, từ đó ta rút gọn được biểu thức rồi tính được giá trị.

2 - Đối với các bài tập chứng minh ta cũng có thể áp dụng cách làm về tính giá trị của dãy số, từ đó ta có thể biến đổi biểu thức cần chứng minh về dạng quen thuộc

MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC

Bài 1. Với n $\in N^*$, kí hiệu $a_n = (-1)^n \cdot \dfrac{n^2+n+1}{n!}$.

Hãy tính tổng $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2007}$

Lời giải

Ta thấy: $\forall n \in N^*$ thì:

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{n^2+n+1}{n!} = (-1)^n \cdot \left(\frac{n^2}{n!} + \frac{n+1}{n!}\right) = (-1)^n \cdot \left(\frac{n}{(n-1)} + \frac{n+1}{n!}\right)$$

Do đó: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2007} = a_1 + \left(\dfrac{2}{1!} + \dfrac{3}{2!}\right) - \left(\dfrac{3}{2!} + \dfrac{4}{3!}\right) + \ldots + \left(\dfrac{2006}{2005!} + \dfrac{2007}{2006!}\right) -$

$- \left(\dfrac{2006}{2005!} + \dfrac{2007}{2006!}\right) = -3 + \dfrac{2}{1!} - \dfrac{2007}{2006!} = -1 - \dfrac{2007}{2006!}$

Bài 2. Xét biểu thức: S = $\dfrac{1}{2^0} + \dfrac{2}{2^1} + \dfrac{3}{2^2} + \ldots + \dfrac{1992}{2^{1991}}$ Chứng minh rằng S < 4

Lời giải

Ta có: 2S =

$$\frac{2}{2^0} + \frac{4}{2^1} + \frac{3}{2^1} + \frac{4}{2^2} \ldots + \frac{1992}{2^{1990}} = 4 + \left(\frac{2}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right) + \ldots + \left(\frac{1991}{2^{990}} + \frac{1}{2^{1990}}\right) =$$

$$= 3\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2^0} + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \ldots + \frac{1991}{2^{1990}} + \frac{1992}{2^{1991}}\right) - \frac{1992}{2^{1991}} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{1990}} =$$

$$=$$

$$3\frac{1}{2} + S - \frac{1992}{2^{1991}} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{1989}}{1 - \frac{1}{2}} = 3\frac{1}{2} + S - \frac{1992}{2^{1991}} + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{1990} \Rightarrow$$

$$S = 4 - \frac{1992}{2^{1991}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{1990} < 4 \text{ hay } S < 4$$

Bài 3. Ta viết lần lượt các phân số sau:

$\dfrac{1}{1}; \dfrac{2}{1}; \dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{1}; \dfrac{2}{2}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{4}{1}; \dfrac{3}{2}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{4}; \ldots$ Số $\dfrac{1990}{1930}$ đứng ở vị trí nào trong các phân số trên?

Lời giải

Số thứ nhất của dãy số có tổng của tử số và mẫu số bằng 2, hai số tiếp theo có tổng của tử số và mẫu số bằng 3, ba số tiếp theo có tổng của tử và mẫu số bằng 4…

Lại quan sát tiếp ta thấy: Kể từ phân số đầu, cách 1 phân số đến mẫu số là 2, cách 2 phân số đến mẫu số 3, … vậy phân số $\frac{1990}{1930}$ đứng ở vị trí thứ 1930 và của nhóm các số có tổng của tử và mẫu số bằng 1990 + 1930 = 3920. Số các số đứng trước của nhóm này bằng 1 + 2 + 3 + … + 3918 = 1959.3919. Vì nhóm có tổng của tử và mẫu số bằng 3920 thì gồm 3919 số nên nhóm đứng trước nhóm này gồm 3918 số.

Vậy số $\frac{1990}{1930}$ đứng ở vị trí n = 1959.3919 + 1930 = 7679251

Bài tập tự giải

1. Tính: A = $\frac{1}{5.6}+\frac{1}{6.7}+\frac{1}{7.8}+...+\frac{1}{24.25}$

2. Tính: B = $\frac{5^2}{1.6}+\frac{5^2}{6.11}+\frac{5^2}{11.16}+...+\frac{5^2}{26.31}$

3. Chứng minh rằng: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...-\frac{1}{1990}=\frac{1}{996}+...+\frac{1}{1990}$

4. Tính: C = $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+...+\frac{n-1}{n!}$

5 Chứng tỏ rằng: D = $\frac{2!}{3!}+\frac{2!}{4!}+\frac{2!}{5!}+...+\frac{2!}{n!}<1$

6. Cho biểu thức P =$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{199}-\frac{1}{200}$

a) Chứng minh rằng: P = $\frac{1}{101}+\frac{1}{102}...\frac{1}{200}$

b) Gải bài toán trên trong trường hợp tổng quát.

7. Chứng minh rằng: $\forall n\in Z(n\neq 0, n\neq -1)$ thì Q = $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}$ không phải là số nguyên.

8. Chứng minh rằng: S = $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+...+\frac{1}{200^2}<\frac{1}{2}$