HOÀNG NGỌC THẾ

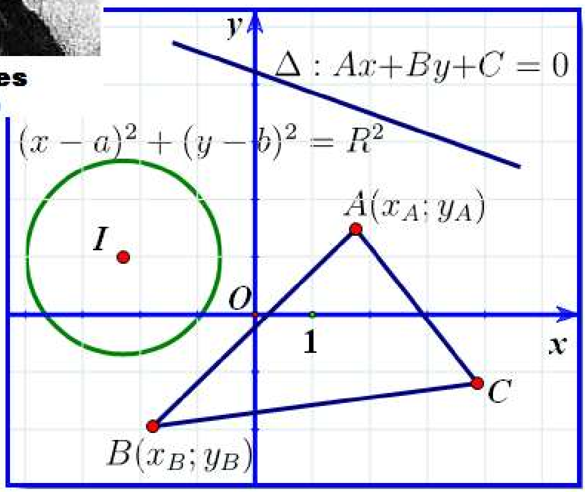
KHÁM PHÁ CÁCH GIẢI

René Descartes
(1596-1650)

Một số bài tập

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

TRONG MẶT PHẲNG



➔**Dành cho HSG toán 11&12**

➔**Luyện thi THPT Quốc Gia**

KHÁM PHÁ CÁCH GIẢI
Một số bài tập hình học giải tích trong mặt phẳng

Hoàng Ngọc Thế

Ngày 25 tháng 7 năm 2015

Kí hiệu dùng trong sách

GTLN	:	Giá trị lớn nhất
GTNN	:	Giá trị nhỏ nhất
HSG	:	Học sinh giỏi
THPT	:	Trung học phổ thông
$\blacksquare$	:	Kết thúc Lời giải
$\triangle$	:	Kết thúc Định nghĩa, Ví dụ
$\square$	:	Kết thúc Định lý
$\boxed{?}$	:	Câu hỏi, hoạt động

Chú ý: Tất cả các bài toán trong cuốn tài liệu này nếu có các biểu thức tọa độ thì ta hiểu là đang xét trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy.

Lời nói đầu

Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng là nội dung thường gặp trong Kì thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng (nay gọi là Kỳ thi THPT Quốc gia). Ngoài ra, trong Kỳ thi HSG những năm gần đây, đề thi của nhiều tỉnh cũng có nội dung này. Đây thường là câu phân loại thí sinh. Các bài toán thường là phải áp dụng tính chất hình học trước khi sử dụng biến đổi đại số chứ không còn là các kĩ thuật tính toán đại số thông thường như trước kia.

Với mục đích ôn luyện đội tuyển HSG và quan trọng hơn là hướng tới kì thi THPT Quốc gia chung, thầy biên soạn tài liệu nhỏ này với hi vọng sẽ giúp các em hình dung chút ít về nội dung này.

Tài liệu có cấu trúc tương đối lạ. Em sẽ thấy một số mục của nó đảo lộn linh tinh và đọc dòng trên với dòng dưới không liên quan gì đến nhau.

Đừng lo. Đó là do em đọc ngẫu nhiên và chỉ đọc mà không làm. Hãy đọc tuần tự và làm theo hướng dẫn. Mọi sư lộn xộn sẽ trở lên ngăn nắp.

Khi gặp kí hiệu $\boxed{\mathbf{Y}}HD2 - tr.10$ thì em cần hiểu là phải tự làm theo hướng dẫn ở trên nó và nếu đã làm được điều đó rồi thì tự làm tiếp hoặc theo HD 2 trang 10.

Khi gặp kí hiệu $\boxed{\mathbf{N}}HD19 - tr.25$ thì em nên đọc kĩ hướng dẫn và tự làm, nếu làm mãi mà không ra thì xem HD 19 trang 25.

Hi vọng em sẽ thấy thú vị với tài liệu kiểu này.

Trong quá trình biên soạn vội vàng, nhất định khó tránh khỏi thiếu sót. Rất mong các em phát hiện và phản hồi.

Pác Khuông, tháng 5 năm 2015

1 Lý thuyết chung

1.1 Hệ tọa độ

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho các điểm:

$$A\left(x_A; y_A\right), B\left(x_B; y_B\right), C\left(x_C; y_C\right), M\left(x_0; y_0\right)$$

- Tọa độ vectơ: $\overrightarrow{AB} = \left(x_B - x_A; y_B - y_A\right)$
- Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là:

$$J\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

- Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

1.2 Phương trình đường thẳng

1.2.1 Vectơ chỉ phương và vectơ pháp tuyến của đường thẳng:

- Vectơ $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0})$ là **vectơ chỉ phương** của đường thẳng d nếu nó có giá song song hoặc trùng với đường thẳng d.
- Vectơ $\overrightarrow{n}(\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0})$ là **vectơ pháp tuyến** của đường thẳng d nếu nó có giá vuông góc với đường thẳng d.
- Đường thẳng $ax + by + c = 0$ có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n} = (a; b)$.
- Hai đường thẳng song song có cùng vectơ chỉ phương (vectơ pháp tuyến).
- Hai đường thẳng vuông góc có vectơ pháp tuyến của đường thẳng này là vectơ chỉ phương của đường thẳng kia.
- Nếu $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{n}$ lần lượt là vectơ chỉ phương, vectơ pháp tuyến của đường thẳng d thì $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = 0$. Do đó, nếu $\overrightarrow{u} = (a; b)$ thì $\overrightarrow{n} = (b; -a)$.

- Một đường thẳng có vô số vectơ pháp tuyến, vô số vectơ chỉ phương. Nếu $\overrightarrow{n}$ là một vectơ pháp tuyến (vectơ chỉ phương) của đường thẳng d thì $k\overrightarrow{n}(k \neq 0)$ cũng là một vectơ pháp tuyến, vectơ chỉ phương của d.

1.2.2 Bốn loại phương trình đường thẳng

- **Phương trình tổng quát** của đường thẳng:

$$ax + by + c = 0 \quad (a^2 + b^2 > 0) \tag{1}$$

Đường thẳng đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ và nhận $\overrightarrow{n} = (a; b)$ là vectơ pháp tuyến có phương trình dạng:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \tag{2}$$

Đặc biệt: đường thẳng đi qua $(a; 0), (0; b)$ có phương trình theo đoạn chắn:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{3}$$

* Đường thẳng đi qua $M(x_0; y_0)$ và nhận vectơ $\overrightarrow{n} = (p; q)$ làm vectơ chỉ phương, có **phương trình tham số** là:

$$\begin{cases} x = x_0 + pt \\ y = y_0 + qt \end{cases} \tag{4}$$

Có **phương trình chính tắc** là:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} \quad (p, q \neq 0) \tag{5}$$

Đặc biệt: đường thẳng đi qua 2 điểm phân biệt $A\left(x_A; y_A\right), B\left(x_B; y_B\right)$ có phương trình dạng:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \tag{6}$$

- Đường thẳng đi qua $M(x_0; y_0)$ và có hệ số góc k thì có **phương trình đường thẳng với hệ số góc** dạng:

$$y = k(x - x_0) + y_0 \tag{7}$$

Chú ý:

– Không phải đường thẳng nào cũng có hệ số góc. Các đường thẳng dạng $x = a$ không có hệ số góc. Do vậy, khi giải các bài toán dùng hệ số góc, ta phải xét cả trường hợp đặc biệt này.
– Nếu $\overrightarrow{n} = (a; b)$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng thì hệ số góc của nó là $k = -\frac{a}{b}, b \neq 0$.

1.2.3 Vị trí tương đối của 2 điểm và 1 đường thẳng

Cho $A\left(x_A; y_A\right), B\left(x_B; y_B\right)$ và đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$. Khi đó:

- Nếu $\left(ax_A + by_A + c\right)\left(ax_B + by_B + c\right) < 0$ thì A, B ở về hai phía khác nhau đối với Δ.
- Nếu $\left(ax_A + by_A + c\right)\left(ax_B + by_B + c\right) > 0$ thì A, B ở cùng một phía đối với Δ

1.2.4 Chùm đường thẳng

Cho hai đường thẳng cắt nhau:

$$d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0; d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

Khi đó mọi đường thẳng đi qua giao điểm I của hai đường thẳng trên đều có phương trình dạng:

$$\lambda\left(a_1x + b_1y + c_1\right) + \mu\left(a_2x + b_2y + c_2\right) = 0 \tag{8}$$

trong đó $\lambda^2 + \mu^2 > 0$

1.3 Góc và khoảng cách

- Góc giữa hai vectơ $\vec{v}, \vec{w}$ được tính dựa theo công thức:

$$\cos(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{\vec{u}.\vec{w}}{|\vec{v}| \, . \, |\vec{w}|} \tag{9}$$

- Giả sử $\overrightarrow{n}_1, \overrightarrow{n}_2$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của các đường thẳng d_1 và d_2. Khi đó:

$$cos(d_1, d_2) = \frac{|\overrightarrow{n}_1 . \overrightarrow{n}_2|}{|\overrightarrow{n}_1| \, . \, |\overrightarrow{n}_2|} \tag{10}$$

- Độ dài vectơ $\vec{u} = (a; b)$ là:

$$|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{11}$$

- Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ là:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \tag{12}$$

- Diện tích tam giác ABC là:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{(AB.AC)^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2} \tag{13}$$

- Khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0)$ đến đường thẳng

$$d : ax + by + c = 0$$

được tính bằng công thức:

$$d_{(M;d)} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{14}$$

1.4 Phương trình đường tròn

- Đường tròn tâm $I(a; b)$, bán kính R có dạng:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \tag{15}$$

- Phương trình:

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0, \quad (a^2 + b^2 - c > 0) \tag{16}$$

cũng là phương trình đường tròn với tâm $I(-a; -b)$ và bán kính

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$$

- Phương trình tiếp tuyến của đường tròn tại điểm $M(x_0; y_0)$

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0 \tag{17}$$

- Vị trí tương đối của đường thẳng Δ và đường tròn (C) tâm I, bán kính R.
  - Nếu $d_{(I;\Delta)} > R$ thì Δ và (C) không cắt nhau.
  - Nếu $d_{(I;\Delta)} = R$ thì Δ và (C) tiếp xúc tại I' là hình chiếu của I lên d.
  - Nếu $d_{(I;\Delta)} < R$ thì Δ và (C) cắt nhau tại hai điểm M, N. Khi đó trung điểm H của MN là hình chiếu của I lên MN và

$$MN = 2\sqrt{R^2 - d^2_{(I,\Delta)}} \tag{18}$$

1.5 Phương trình Elip

- Elip là tập hợp các điểm M di động thỏa mãn $MF_1 + MF_2 = 2a$ với F_1, F_2 cố định, $F_1F_2 = 2c$, $a > c > 0$ là các số cho trước.

- $F_1(-c;0)$,$F_2(c;0)$ được gọi là **tiêu điểm**, $F_1F_2 = 2c$ được gọi là **tiêu cự**. MF_1, MF_2 là các **bán kính qua tiêu**.

- Các điểm $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ được gọi là các **đỉnh** của elip. Đoạn thẳng $A_1A_2 = 2a$ được gọi là **trục lớn**, $B_1B_2 = 2b$ được gọi là **trục nhỏ**.

- **Phương trình chính tắc của Elip** có hai tiêu điểm $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ là:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{19}$$
Trong đó $a > b > 0, b^2 = a^2 - c^2$.

- **Tâm sai** $e = \dfrac{c}{a}$.

- Cho elip (E) có phương trình chính tắc (19). Hình chữ nhật $PQRS$ với $P(-a;b)$, $Q(a;b)$, $R(a;-b)$, $S(-a;-b)$ được gọi là **hình chữ nhật cơ sở** của Elip.

- Nếu $M \in (E)$ và M, F_1, F_2 không thẳng hàng thì đường thẳng phân giác ngoài của góc $\widehat{F_1MF_2}$ chính là tiếp tuyến của (E) tại M.

Chú ý: Các **HD** dưới đây không liên quan gì đến nội dung ở trên. Nếu em không hiểu sao nó lại ở đây thì hãy đọc lại phần **Lời nói đầu.**

HD 1. ĐA: $E(3;-1)$, $F(5;5)$, $D(3;3)$, $A(1;1)$,$B(3;5)$,$C(7;1)$

HD 2. Gọi $H = ME \cap AC$. Em đã nhận ra và chứng minh được $BH \perp AC$ chứ? Vậy ta có thể tìm được tọa độ H, phương trình HB, tham số hóa tọa độ B, C, tìm được B, C (vì M là trung điểm), phương trình AI và cuối cùng là tọa độ của A.

ĐA: Xem $HD39 - tr.36$

HD 3. Gọi K là trung điểm DH. Em chứng minh $AK \perp KM$ được rồi chứ. Bây giờ tìm phương trình KM, tọa độ K, phương trình BD, tọa độ B, C.

ĐA: Xem $HD41 - tr.47$

HD 4. ĐA: Có 2 hình vuông thỏa mãn là $(3;3)$,$(1;1) \in (d)$, $(3;-1)$, $(5;1) \in (C)$ và $\left(\frac{9}{5};\frac{9}{5}\right)$, $\left(\frac{11}{5};\frac{11}{5}\right) \in (d)$, $\left(\frac{9}{5};\frac{13}{5}\right)$, $\left(\frac{7}{5};\frac{11}{5}\right) \in (C)$

HD 5. Hãy chứng minh tam giác ABC là tam giác cân đỉnh A

$\boxed{\textbf{Y}}HD53 - tr.51/\boxed{\textbf{N}}HD34 - tr.33$

HD 6. Hãy vẽ đường tròn đường kính FK. Em có nhận ra điều thú vị không? Nhớ chứng minh nhé.

$\boxed{\textbf{Y}}HD57 - tr.51/\boxed{\textbf{N}}HD46 - tr.47$

HD 7. ĐA: $A(1;1)$, $B(2;-1)$, $C(1;-2)$

HD 8. Gọi k là hệ số góc của đường thẳng OB. Ta có thể viết được phương trình OB. Khi đó $B = OB \cap (C_2)$, C đối xứng với A qua OB. Ngoài ra $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{AB} = 0$.

ĐA: Xem $HD27 - tr.26$

HD 9. Em có phát hiện ra là $GA = GD = GB$ và $DG \perp AK$ không?. Hãy chứng minh điều đó.

$\boxed{\textbf{Y}}$ $HD25 - tr.26$/$\boxed{\textbf{N}}$ $HD33 - tr.33$

HD 10. **ĐA:** $A(-7;10)$, $B(7;4)$, $AB : 3x + 7y - 49 = 0$.

HD 11. Bài này giống ví dụ 22 trang 40. **ĐA:** Xem $HD18 - tr.25$

HD 12. Vẽ hình và tìm một đường vuông góc với BC.

$\boxed{\textbf{Y}}$ $HD57 - tr.51$/$\boxed{\textbf{N}}$ $HD47 - tr.47$

HD 13. Em có nhận ra $\dfrac{PJ}{PI} = \dfrac{r_b}{r_c}$. Từ đó, tìm được P. Tìm được P thì viết phương trình BC là tiếp tuyến chung đi qua P của hai đường tròn.

ĐA: Xem $HD31 - tr.33$

HD 14. Em có thấy ý a) quen quen không? Nó giống như bài toán *có hai người hẹn nhau tại bờ sông ....* Ý b) cũng tương tự. Nhớ phải kiểm tra xem A, B có cùng phía so với d không.

$\boxed{\textbf{Y}}$ $HD16 - tr.25$/$\boxed{\textbf{N}}$ $HD37 - tr.33$

2 Một số kĩ thuật cơ bản

2.1 Kĩ thuật xác định tọa độ điểm

2.1.1 Dựa vào hệ điểm

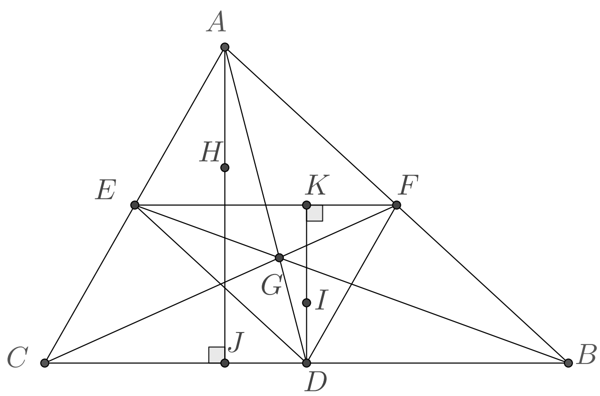
Xác định tọa độ điểm M thỏa mãn điều kiện nào đó với hệ các điểm $A_1, A_2, ..., A_n$. Đối với bài toán này, ta đặt $M(x; y)$ và khai thác giả thiết.

Ví dụ 1. *Cho tam giác ABC có trọng tâm $G(1; 2)$, trực tâm $H(-1; 3)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác.* △

Để giải quyết được bài toán này, ta cần biết đến *đường thẳng Euler* trong tam giác.

Định lý 1 (Đường thẳng Euler).
Cho tam giác ABC bất kì, khi đó trọng tâm G, trực tâm H, tâm đường tròn ngoại tiếp I thẳng hàng. Đường thẳng đi qua ba điểm đó gọi là đường thẳng Euler của tam giác. □

CHỨNG MINH.
Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB.



Xét phép vị tự $\mathcal{V} = V_{(G; -\frac{1}{2})}$.

Ta có: $\mathcal{V}(\Delta ABC) = \Delta DEF$. Do đó, $\mathcal{V}$ biến đường cao AJ của tam giác ABC thành đường cao DK của tam giác DEF. Dễ thấy DK cũng là đường trung trực của đoạn thẳng BC. Vậy I là trực tâm tam giác DEF. Tức là $\mathcal{V}(H) = I$. Do đó H, G, I thẳng hàng và $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GI}$. ■

Quay trở lại bài toán, ta có thể dễ dàng tìm được tọa độ điểm I.

LỜI GIẢI.
Giả sử $I(x; y)$. Ta có: $\overrightarrow{GH} = (-2; 1); \overrightarrow{GI} = (x-1; y-2)$.
Vì $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GI}$ nên:

$$\begin{cases} -2(x-1) = -2 \\ -2(y-2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy $I\left(2; \dfrac{3}{2}\right)$. ■

2.1.2 Xác định tọa độ giao điểm của hai đường

Giao của hai đường thẳng

Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng

$$d_1 : ax + by + c = 0, d_2 : mx + ny + p = 0$$

(nếu có) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ mx + ny + p = 0 \end{cases} \tag{20}$$

Giao của đường thẳng và đường tròn

Cho đường thẳng d và đường tròn (C):

$$d : \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}, (C) : (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

Tọa độ giao điểm của d và (C) (nếu có) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \end{cases} \tag{21}$$

$\boxed{?}$ Hệ này giải thế nào?

Giao của đường thẳng và Elip

Cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}$ và elip $(E) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Tọa độ giao điểm của d và (E) (nếu có) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \tag{22}$$

Giao của hai đường tròn

Tọa độ giao điểm của hai đường tròn:

$(C_1) : x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0; (C_2) : x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0$

(nếu có) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \tag{23}$$

Ví dụ 2. *Cho hai đường tròn:*

$$(C_1) : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25; (C_2) : \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}.$$

Tìm tọa độ giao điểm (nếu có) của chúng. △

LỜI GIẢI.
Tọa độ giao điểm (nếu có) của hai đường tròn là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-4y-20=0 \\ x^2+y^2-7x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=4 \\ x^2+y^2-7x+y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=4 \\ \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=1 \end{array}\right. \end{cases}$$

Vậy hai đường tròn cắt nhau tại $A(6;2), B(1;-3)$. ■

2.1.3 Điểm thuộc đường

Để tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng $d:\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \end{cases}$ thỏa mãn điều kiện nào đó. Ta lấy điểm $M(x_0+mt; y=y_0+nt)$ và áp dụng giả thiết, ta thu được phương trình ẩn t. Như thế, ta gọi là **tham số hóa** tọa độ điểm M.

Ví dụ 3. *Cho điểm $A(2;-1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng $d: 2x-y-4=0$ sao cho $AM=\sqrt{2}$* △

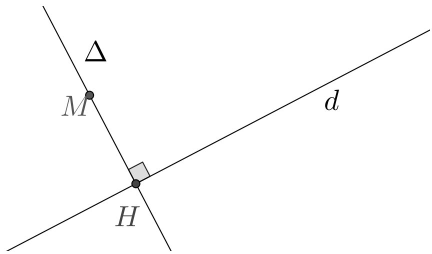
LỜI GIẢI.
Giả sử $M(m;2m-4)$. Ta có: $AM=\sqrt{(m-2)^2+(2m-3)^2}$. Khi đó:

$$AM=\sqrt{2} \Leftrightarrow 5m^2-16m+11=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\dfrac{11}{5} \end{array}\right.$$

Vậy các điểm cần tìm là $M_1(1;-2)$, $M_2\left(\dfrac{11}{5};\dfrac{2}{5}\right)$. ■

2.2 Tìm tọa độ hình chiếu của một điểm lên một đường thẳng

Để tìm tọa độ hình chiếu H của M lên đường thẳng d ta có 2 cách:



- Cách 1: Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và vuông góc với d. Điểm H chính là giao điểm của d và Δ.
- Cách 2: Tham số hóa tọa độ của $H \in d$ và dựa vào điều kiện $MH \perp d$.

Ví dụ 4. *Tìm tọa độ hình chiếu H của điểm $M(-1;-1)$ lên đường thẳng $d : x - y + 2 = 0$.* △

LỜI GIẢI (CÁCH 1).
Đường thẳng Δ đi qua M và vuông góc với đường thẳng d có phương trình dạng:

$$1.(x+1) + 1.(y+1) = 0 \Leftrightarrow x + y + 2 = 0$$

Do $H = d \cap \Delta$ nên tọa độ của H là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ ta được $H(-2;0)$ ■

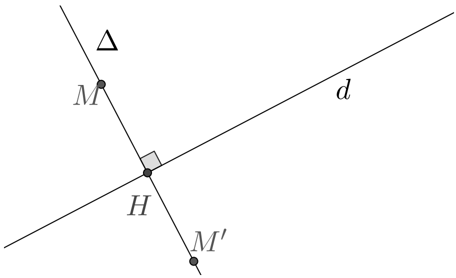
LỜI GIẢI (CÁCH 2).
Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;1)$. Giả sử $H(h;h+2) \in d$. Ta có: $\overrightarrow{MH} = (h+1;h+3)$

$$\overrightarrow{MH}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow 1.(h+1) + 1.(h+3) = 0 \Leftrightarrow h = -2$$

Vậy $H(-2;0)$ ■

2.3 Tìm tọa độ điểm đối xứng của một điểm qua một đường thẳng

Để tìm tọa độ điểm đối xứng M' của M qua đường thẳng d ta có 2 cách:



- Cách 1: Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu của M lên d. Do H là trung điểm MM' nên áp dụng công thức tìm tọa độ trung điểm, ta tìm được M
- Cách 2: Giả sử $M'(x; y)$ và H là trung điểm của MM'. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} H \in d \\ \overrightarrow{MM'}.\vec{u} = 0 \end{cases}$$

Ví dụ 5. *Tìm tọa độ điểm M' là đối xứng của điểm $M(1; 1)$ qua đường thẳng $d : x + y + 2 = 0$.* △

LỜI GIẢI (CÁCH 1).
Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; -1)$. Hình chiếu của M lên đường thẳng d là $H(h; -h - 2) \in d$. Ta có: $\overrightarrow{MH} = (h - 1; -h - 3)$. Do đó:

$$\overrightarrow{MH}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow 1.(h - 1) - 1.(-h - 3) = 0 \Leftrightarrow h = -1$$

Vậy $H(-1; -1)$.
Do H là trung điểm của MM' nên:

$$\begin{cases} x_{M'} = 2x_H - x_M = -3 \\ y_{M'} = 2y_H - y_M = -3 \end{cases}$$

Vậy $M'(-3;-3)$. ■

LỜI GIẢI (CÁCH 2).
Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-1)$.

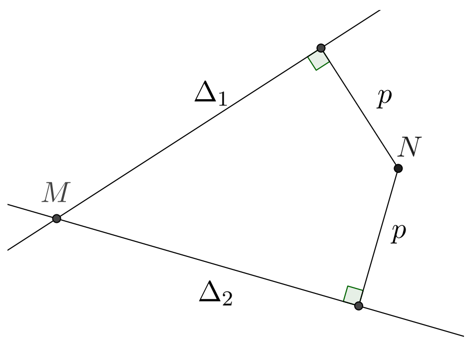
Giả sử $M'(x;y)$. Khi đó trung điểm MM' là $H\left(\dfrac{x+1}{2};\dfrac{y+1}{2}\right)\in d$ và $\overrightarrow{MM'}.\vec{u}=0$. Ta có hệ:

$$\begin{cases}\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{y+1}{2}+2=0\\ 1.(x-1)-1.(y-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\ y=-3\end{cases}$$

Vậy $M'(-3;-3)$. ■

2.4 Viết phương trình đường thẳng đi qua 1 điểm, cách 1 điểm cho trước một khoảng cho trước

Để viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M và cách điểm $N\left(x_N;y_N\right)$ một khoảng bằng p ta thường giả sử vectơ pháp tuyến của đường thẳng là $\vec{n}=(a;b),(a^2+b^2>0)$ và áp dụng công thức tính khoảng cách - công thức (14).



Ví dụ 6. *Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(1;3)$ và cách điểm $B(-2;1)$ một khoảng bằng 3.* △

LỜI GIẢI.
Giả sử $\vec{n} = (a; b), (a^2 + b^2 > 0)$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng cần tìm. Phương trình đường thẳng có dạng:

$$a(x-1) + b(y-3) = 0 \Leftrightarrow ax + by - a - 3b = 0$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} d_{(B;\Delta)} = 3 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{|-2a + b - a - 3b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 3 \\ &\Leftrightarrow \quad 5a^2 - 12ab = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = \dfrac{12}{5}a \end{array}\right. \end{aligned}$$

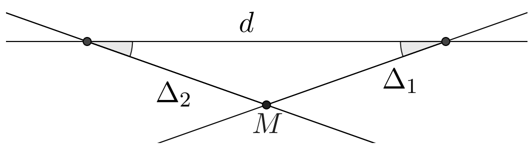
* $b = 0$, chọn $a = 1$ ta có $\Delta_1 : x - 1 = 0$.
* $b = \dfrac{12}{5}a$, chọn $a = 5, b = 12$ ta có $\Delta_2 : 5x + 12y - 41 = 0$. Vậy có 2 đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

$$\Delta_1 : x - 1 = 0; \Delta_2 : 5x + 12y - 41 = 0$$

■

2.5 Viết phương trình đường thẳng đi qua 1 điểm, tạo với 1 đường thẳng khác một góc cho trước

Để viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M và tạo với đường thẳng d một góc bằng α ta thường giả sử vectơ pháp tuyến của đường thẳng là $\vec{n} = (a; b), (a^2 + b^2 > 0)$ và áp dụng công thức tính góc - công thức (10).



Ví dụ 7. *Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $M(2;1)$ và tạo với đường thẳng $d : 2x + 3y + 4 = 0$ một góc 45^o.* △

LỜI GIẢI.
Giả sử $\vec{n} = (a; b), (a^2 + b^2 > 0)$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng cần tìm. Phương trình đường thẳng có dạng:

$$ax + by - 2a - b = 0$$

Khi đó:

$$\begin{aligned}
\cos(d; \Delta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{|2a + 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{4 + 9}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&\Leftrightarrow \quad 5a^2 - 24ab - 5b^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a = 5b \\ a = -\dfrac{1}{5}b \end{array}\right.
\end{aligned}$$

* $a = 5b$, chọn $b = 1, a = 5$ ta có $\Delta_1 : 5x + y - 11 = 0$.
* $a = -\dfrac{1}{5}b$, chọn $b = 5, a = -1$ ta có $\Delta_2 : -x + 5y - 3 = 0$. Vậy có 2 đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

$$\Delta_1 : 5x + y - 11 = 0; \Delta_2 : -x + 5y - 3 = 0$$

■

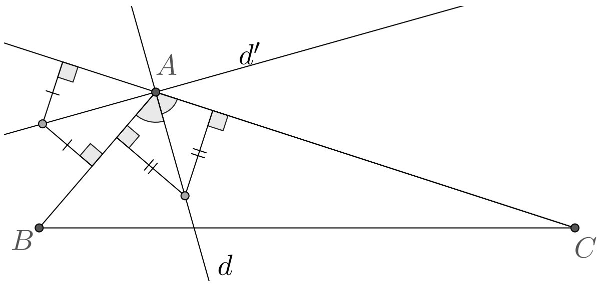
2.6 Viết phương trình đường phân giác trong của một góc

Để viết phương trình đường phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ ta có nhiều cách. Dưới đây là 3 cách thường sử dụng:

- **Cách 1**: Dựa vào tính chất đường phân giác là tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng $AB : ax + by + c = 0$ và $AC : mx + ny + p = 0$, ta có:

$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|mx + ny + p|}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

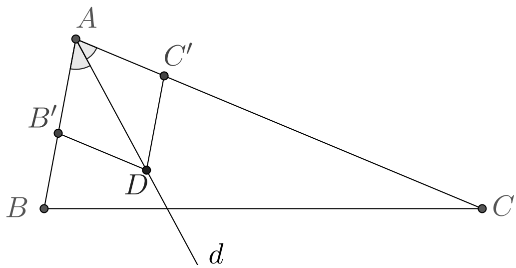
  Hai đường thu được là phân giác trong và phân giác ngoài của góc $\widehat{ABC}$.
  Sau đó, ta cần dựa vào vị trí tương đối của hai điểm B, C với hai đường vừa tìm được để phân biệt phân giác trong, phân giác ngoài. Cụ thể, nếu B, C ở cùng một phía thì đó là phân giác ngoài, ở khác phía thì là phân giác trong.



- **Cách 2**: Lấy B', C' lần lượt thuộc AB, AC sao cho:

$$\overrightarrow{AB'} = \frac{1}{AB}.\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC'} = \frac{1}{AC}.\overrightarrow{AC}.$$

  Giả sử $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'}$ Khi đó tứ giác $AB'DC'$ là hình thoi (Vì sao?).



  Do đó, $\overrightarrow{AD}$ là vectơ chỉ phương của đường phân giác cần tìm.

  $\boxed{?}$ Muốn viết đường phân giác ngoài thì làm thế nào?

- **Cách 3**: Giả sử $\vec{u} = (a; b)$ là vectơ chỉ phương của đường phân giác cần tìm. Ta có:

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \vec{u}) = \cos(\overrightarrow{AC}, \vec{u}) \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AB}.\vec{u}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{\overrightarrow{AC}.\vec{u}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}$$

  $\boxed{?}$ Muốn viết đường phân giác ngoài thì làm thế nào?

Ví dụ 8. *Viết phương trình đường phân giác trong góc A của tam giác ABC biết $A(1;1)$, $B(4;5)$, $C(-4;-11)$.* $\triangle$

LỜI GIẢI (CÁCH 1).
Ta có phương trình các cạnh:

$$AB : 4x - 3y - 1 = 0; AC : 12x - 5y - 7 = 0$$

Phương trình hai đường phân giác góc A là:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{4x-3y-1}{5} = \dfrac{12x-5y-7}{13} \\ \dfrac{4x-3y-1}{5} = -\dfrac{12x-5y-7}{13} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 4x+7y-11=0 & (d_1) \\ 56x-32y-24=0 & (d_2) \end{array}\right.$$

Ta có:

$$(4x_C + 7y_C - 11)(4x_B + 7y_B - 11) < 0$$

Do đó B, C khác phía so với (d_1) hay (d_1) là đường phân giác cần tìm. ■

LỜI GIẢI (CÁCH 2).
Ta có

$$\overrightarrow{AB} = (3;4); AB = 5; \overrightarrow{AB'} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} = \left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-5;-12); AC = 13; \overrightarrow{AC'} = \frac{1}{13}\overrightarrow{AC} = \left(-\frac{5}{13};-\frac{12}{13}\right)$$

Ta có: $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} = \left(\dfrac{14}{65};-\dfrac{8}{65}\right)$. Vậy vectơ chỉ phương của đường phân giác cần tìm là: $\vec{u} = (7;-4)$. Do đó phương trình đường phân giác cần tìm là:

$$4(x-1) + 7(y-1) = 0 \Leftrightarrow 4x + 7y - 11 = 0$$ ■

LỜI GIẢI (CÁCH 3).
Giả sử $\vec{u} = (a;b)$ là vectơ chỉ phương của đường phân giác cần tìm. Ta có

$$\frac{\overrightarrow{AB}.\vec{u}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{\overrightarrow{AC}.\vec{u}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|} \Leftrightarrow \frac{3a+4b}{5} = \frac{-5a-12b}{13} \Leftrightarrow a = -\frac{7}{4}b$$

Vậy vectơ chỉ phương của đường phân giác cần tìm là: $\vec{u} = (7; -4)$. Do đó phương trình đường phân giác cần tìm là:

$$4(x-1) + 7(y-1) = 0 \Leftrightarrow 4x + 7y - 11 = 0$$ ■

2.7 Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm

Để viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm, ta sử dụng phương trình dạng (16) và thay tọa độ ba điểm đó vào, thu được 1 hệ phương trình.

Ví dụ 9. *Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết: $A(1;3)$,$B(-1;-1)$,$C(2;0)$.* △

LỜI GIẢI.
Giả sử phương trình đường tròn (C) cần tìm có dạng

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0, \quad (a^2 + b^2 - c > 0)$$

Do $A, B, C \in (C)$ nên:

$$\begin{cases} 1 + 9 + 2a + 6b + c = 0 \\ 1 + 1 - 2a - 2b + c = 0 \\ 4 + 2a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ c = -4 \end{cases} \quad \text{(Thỏa mãn)}$$

Vậy $(C): x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$. ■

2.8 Viết phương trình đường thẳng đi qua hai tiếp điểm của đường tròn

Cho điểm $A\left(x_A; y_A\right)$ nằm ngoài đường tròn (C) tâm I bán kính R. Từ A, kẻ hai tiếp tuyến AT_1, AT_2 tới (C). Hãy viết phương trình đường thẳng T_1, T_2.

Giả sử $T(x;y)$, $I(a;b)$ là tiếp điểm (T là T_1 hoặc T_2). Khi đó, ta có:

$$\begin{cases} T \in (C) \\ \overrightarrow{AT}.\overrightarrow{IT} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \\ \left(x - x_A\right)(x-a) + \left(y - y_A\right)(y-b) = 0 \end{cases} \tag{24}$$

Trừ từng vế 2 phương trình của (24) ta thu được 1 phương trình đường thẳng. Đó là phương trình cần tìm.

Ví dụ 10. *Cho đường tròn (C) có phương trình $(x-4)^2+y^2=4$ và điểm $M=(1;-2)$. Tìm tọa độ điểm N thuộc Oy sao cho từ N kẻ được 2 tiếp tuyến NA, NB đến (C) (A, B là tiếp điểm) đồng thời đường thẳng AB đi qua M.* △

LỜI GIẢI.

Gọi I và T lần lượt là tâm và tiếp điểm của đường tròn (C) (T là A hoặc B). Ta có:

$$N\left(0;n\right), I\left(4;0\right), T\left(x_0;y_0\right), \overrightarrow{NT}=\left(x_0;y_0-n\right), \overrightarrow{IT}=\left(x_0-4;y_0\right)$$

Khi đó

$$\begin{cases} T\in(C) \\ \overrightarrow{NT}.\overrightarrow{IT}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2+y_0^2-8x_0+12=0 \\ x_0^2-4x_0+y_0^2-ny_0=0 \end{cases}$$

Trừ từng vế hai phương trình của hệ, ta có:

$$4x_0-ny_0-12=0$$

Vậy AB có phương trình là:

$$4x-ny-12=0$$

Vì AB đi qua $M(1;-2)$ nên:

$$4+2n-12=0$$

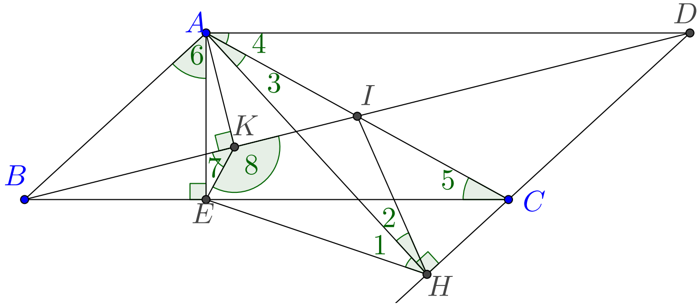
hay $n=4$. Vậy $N(0;4)$. ■

HD 15. Gọi $E = AC \cap (d_2)$. Hãy xác định tỉ số $\dfrac{AC}{AE}$ và từ đó tính tọa độ C, E bằng cách tham số hóa.

$\boxed{\textbf{Y}}$ $HD38 - tr.36$/$\boxed{\textbf{N}}$ $HD42 - tr.47$

HD 16. **ĐA:** a) $M\left(\dfrac{31}{35}; \dfrac{33}{35}\right)$, b) $M(5; 3)$.

HD 17. Em chứng minh được tứ giác $HIKE$ nội tiếp chưa? Hình vẽ dưới đây là gợi ý cho em để chứng minh.



$\boxed{\textbf{Y}}$ $HD55 - tr.51$/$\boxed{\textbf{N}}$ $HD30 - tr.33$

HD 18. Bài toán chính là tìm điểm M trên đường thẳng $d: x + 2y + 4 = 0$ sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất, với $A(1; 1)$, $B(-2; 1)$. **ĐA:** $\min S = \dfrac{\sqrt{685}}{5}$

HD 19. Em chưa tìm được đường vuông góc với AC phải không?
Gọi $H = ME \cap AC$. Chứng minh rằng $BH \perp AC$. Hướng dẫn: chứng minh $\widehat{MHC} = \widehat{MCH}$.

$\boxed{\textbf{Y}}$ $HD39 - tr.36$/$\boxed{\textbf{N}}$ $HD2 - tr.10$

HD 20. Tam giác ABC cân tại A thì ta có thể viết được phương trình AD và dựa vào $BF = BD$ ta tính được F. Từ đó tìm được $A = BF \cap AD$.

ĐA: Xem $HD53 - tr.51$

HD 21. **ĐA:** $C(1; -7)$, $B(-4; 7)$

HD 22. Gọi r_b, r_c lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác AHB, AHC. Khi đó, hãy chứng minh: $JH = \sqrt{2}r_b$, $IH = \sqrt{2}r_c$ và $\widehat{IHJ} = 90^o$.

$\boxed{\textbf{Y}}HD58 - tr.51/\boxed{\textbf{N}}HD58 - tr.51$

HD 23. Em chưa phát hiện ra yếu tố vuông góc quý hơn vàng của bài toán phải không? Gọi K là trung điểm DH. Hãy chứng minh $AK \perp KM$.

$\boxed{\textbf{Y}}HD41 - tr.47/\boxed{\textbf{N}}HD3 - tr.10$

HD 24. Em chưa biết cách xác định tọa độ của trực tâm H phải không? Hãy chứng minh tứ giác $BHCD$ là hình bình hành. Khi đó, M là trung điểm HD.

$\boxed{\textbf{Y}}HD40 - tr.36/\boxed{\textbf{N}}HD45 - tr.47$

HD 25. **ĐA:** $AB : x = 3$

HD 26. Để tìm A, hãy chứng minh $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{IM}$. Để tìm B, hãy viết phương trình BC.

$\boxed{\textbf{Y}}HD10 - tr.11/\boxed{\textbf{N}}HD49 - tr.51$

HD 27. **ĐA:** $C_1\left(1-\sqrt{3}; \sqrt{2\sqrt{3}-3}\right)$; $B_1\left(1-\sqrt{3}; -\sqrt{2\sqrt{3}}\right)$
$C_2\left(1-\sqrt{3}; -\sqrt{2\sqrt{3}-3}\right)$; $B_2\left(1-\sqrt{3}; \sqrt{2\sqrt{3}}\right)$

HD 28. Do $EF = 2HK = 2R$ nên tâm I của đường tròn là trung điểm EF. Tam giác DEF nhận G làm trọng tâm.

$\boxed{\textbf{Y}}HD1 - tr.10/\boxed{\textbf{N}}HD44 - tr.47$

HD 29. **ĐA:** $BC : 3x + 4y - 29 = 0,\ A(-1; 2)$

3 Phương pháp giải toán

Phương pháp chung để giải quyết bài toán hình học giải tích phẳng gồm các bước sau:

- Vẽ hình, xác định các yếu tố đã biết lên hình
- Khám phá các tính chất khác của hình (nếu cần). Chú ý tìm các đường vuông góc, song song, đồng quy; các đoạn bằng nhau, góc bằng nhau; các góc đặc biệt; quan hệ thuộc giữa điểm và đường thẳng, đường tròn, ...
- Xác định các điểm, đường thẳng (theo các kĩ thuật đã học) để thực hiện yêu cầu bài toán.

Sau đây ta sẽ xét một số ví dụ.

Ví dụ 11. *Cho tam giác ABC có $A(2;2)$ và các phân giác trong góc B, góc C lần lượt là:*

$$\Delta_B : x - 3y - 4 = 0, \Delta_C : x + y - 2 = 0$$

Tìm tọa độ B và C. △

LỜI GIẢI.

Gọi $B'(b_1;b_2)$, $C'(c_1;c_2)$ lần lượt là điểm đối xứng của điểm A qua Δ_B và Δ_C. Ta có B', C' nằm trên BC.

Dễ thấy $\vec{u} = (3;1)$ là 1 vectơ chỉ phương của Δ_B. Gọi I là trung điểm AB', ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB'} \perp \vec{u} \\ I \in \Delta_B \end{cases} . \Leftrightarrow \begin{cases} 3.(b_1 - 2) + 1.(b_2 - 2) = 0 \\ \dfrac{b_1 + 2}{2} - 3.\dfrac{b_2 + 2}{2} - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \dfrac{18}{5} \\ b_2 = -\dfrac{14}{5} \end{cases}$$

Vậy $B'\left(\dfrac{18}{5}; \dfrac{14}{5}\right)$. Tương tự, $C'(0;0)$.

Đường thẳng BC đi qua $(0;0)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{C'B'}$ nên có phương trình: $7x - 9y = 0$.

Từ đó suy ra $C(9;-7), B\left(\dfrac{6}{5}; \dfrac{14}{15}\right)$. ■

Ví dụ 12. *Cho tam giác ABC. Gọi A', B', C' là các điểm sao cho $ABA'C$, $BCB'A$ và $CAC'B$ và là hình bình hành. Biết $H_1(0;-2)$, $H_2(2;-1)$ và $H_3(0;1)$ là trực tâm của các tam giác BCA', CAB', ABC'. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.* △

$\boxed{\mathbf{Y}}\, HD7 - tr.10 / \boxed{\mathbf{N}}\, HD36 - tr.33$

Ví dụ 13. *Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp $K(1,4)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $I(3,5)$ và $F(11,14)$ là tâm đường tròn bàng tiếp cạnh BC của tam giác. Viết phương trình BC và tìm tọa độ điểm A.*

Đường tròn bàng tiếp cạnh BC của tam giác là đường tròn tiếp xúc với đoạn thẳng BC và các tia AB, AC.

$\boxed{\mathbf{Y}}\, HD46 - tr.47 / \boxed{\mathbf{N}}\, HD6 - tr.10$

Ví dụ 14. *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm I. Điểm $M(2;-1)$ là trung điểm cạnh BC và điểm $E\left(\frac{31}{13}; -\frac{1}{13}\right)$ là hình chiếu của B lên AI. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết đường thẳng $AC: 3x + 2y - 13 = 0$* △

Hãy vẽ hình và chỉ ra một đường thẳng vuông góc với AC.

$\boxed{\mathbf{Y}}\, HD39 - tr.36 / \boxed{\mathbf{N}}\, HD19 - tr.25$

Ví dụ 15. *Viết phương trình đường thẳng đi qua $M(3;1)$ cắt Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho:*
a) $OA + OB$ nhỏ nhất
b) Diện tích tam giác OAB nhỏ nhất
c) $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất. △

LỜI GIẢI.
Giả $A\left(\frac{1}{a};0\right)$, $B\left(0;\frac{1}{b}\right)$. Phương trình đường thẳng d cần tìm có dạng:

$$ax + by = 1$$

Vì $M(3;1) \in d$ nên:
$$3a + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 - 3a$$

a) Ta có:
$$OA + OB = \left|\frac{1}{a}\right| + \left|\frac{1}{b}\right| \geq \left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{3a+b}{a} + \frac{3a+b}{b}\right| =\geq 4 + 2\sqrt{3}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $a = \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}; b = \dfrac{3\sqrt{3}-3}{6}$. Do đó phương trình cần tìm là:
$$\left(3-\sqrt{3}\right)x + \left(3\sqrt{3}-3\right)y = 6$$

b) Ta có:
$$S_{OAB} = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{ab}\right| \geq \frac{1}{2}.\frac{1}{ab} \geq 6$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $a = \dfrac{1}{6}; b = \dfrac{1}{2}$. Do đó phương trình cần tìm là: $x + 3y = 6$

c) Ta có:
$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = a^2 + b^2 \geq \frac{(3a+b)^2}{3^2+1} = \frac{1}{10}$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $a = \dfrac{3}{10}; b = \dfrac{1}{10}$.

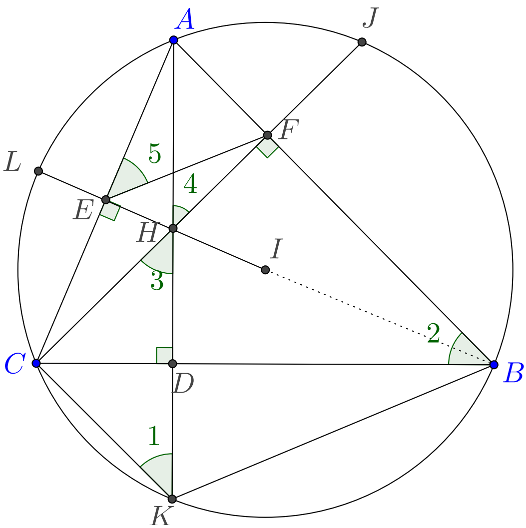
Do đó phương trình cần tìm là: $3x + y = 10$. ■

Ví dụ 16. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn có bán kính $R = \sqrt{10}$, điểm $G\left(\dfrac{11}{3}; \dfrac{7}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác ABC. Các điểm $K(4;4); H(3;1)$ lần lượt là chân đường cao hạ từ A, B của tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC*

Đây là một bài toán khá thú vị. Trước khi giải, ta cần ôn lại tính chất quan trọng của trực tâm tam giác.

Định lý 2.
Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I và H là trực tâm tam giác. Gọi J, K, L lần lượt là điểm đối xứng của H qua AB, BC, CA. Khi đó J, K, L nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. □

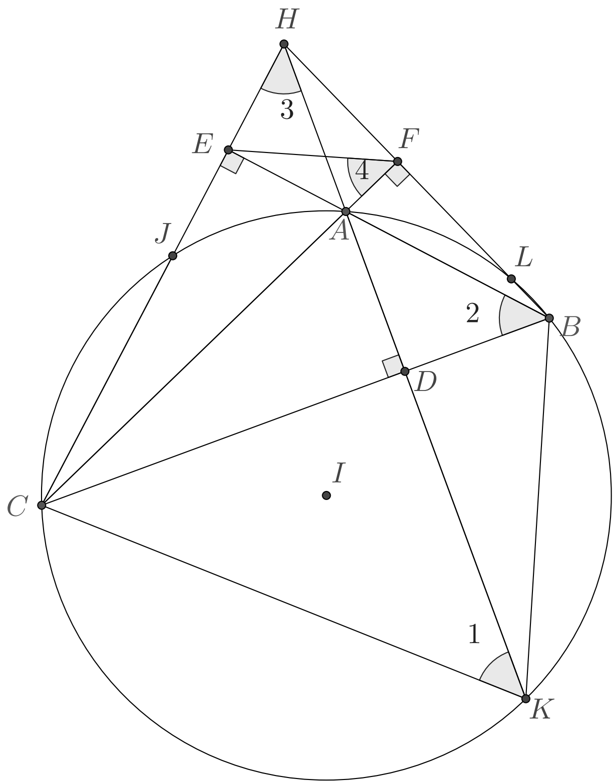
CHỨNG MINH.
Gọi AD, BE, CF là các đường cao của tam giác.
Trường hợp $\widehat{A} = 90^o$. Hiển nhiên ta có điều phải chứng minh.
Trường hợp $\widehat{A} < 90^o$.
Ta có:



$$\begin{cases} \widehat{K_1} = \widehat{H_3} \text{ (K,H đối xứng)} \\ \widehat{H_3} = \widehat{H_4} \\ \widehat{H_4} = \widehat{E_5} \text{ (AEHF nội tiếp)} \\ \widehat{E_5} = \widehat{B_2} \text{ (CEFB nội tiếp)} \end{cases} \Rightarrow \widehat{K_1} = \widehat{B_2}$$

Vậy tứ giác $ABKC$ nội tiếp. Tức là K nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Chứng minh tương tự cho L, K.

Trường hợp $\widehat{A} > 90^o$.



Ta có:

$$\begin{cases} \widehat{K_1} = \widehat{H_3} \text{ (K,H đối xứng)} \\ \widehat{H_3} = \widehat{F_4} \text{ (AEHF nội tiếp)} \\ \widehat{F_4} = \widehat{B_2} \text{ (CEFB nội tiếp)} \end{cases} \Rightarrow \widehat{K_1} = \widehat{B_2}$$

Vậy tứ giác $ABKC$ nội tiếp. Tức là K nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Chứng minh tương tự cho L, K. Vậy J, K, L nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. ■

Chú ý:
Khi chứng minh các bài toán hình học phẳng mà sử dụng các góc bằng nhau, ta cần xét các trường hợp góc tù, góc nhọn; điểm nằm trong đoạn, nằm ngoài đoạn; tia nằm giữa tia, ...

Quay lại bài toán, gọi E, F lần lượt là điểm đối xứng của trực tâm D qua H, K dựa vào tính chất vừa nêu và Định lý về đường thẳng Euler trong tam giác (Định lý 1-tr.12), em hãy nêu các tính chất đặc biệt của tam giác DEF.

$\boxed{\mathbf{Y}}\, HD44 - tr.47 / \boxed{\mathbf{N}}\, HD28 - tr.26$

Ví dụ 17. *Cho tam giác ABC có điểm $M(3;-1)$ là trung điểm BC. Điểm $E(-1;-3)$ thuộc đường thẳng chứa đường cao đỉnh B. Đường thẳng AC đi qua điểm $F(1;3)$. Điểm đối xứng của A qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $D(4;-2)$.* $\triangle$

Khi đề bài cho điểm đối xứng qua tâm ngoại tiếp thì cần dựng thêm trực tâm tam giác để tận dụng tính chất đối xứng.
Em hãy vẽ hình và chỉ ra cách xác định tọa độ trực tâm H.

$\boxed{\mathbf{Y}}\, HD45 - tr.47 / \boxed{\mathbf{N}}\, HD24 - tr.26$

Ví dụ 18. *Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $H(1,2)$ là hình chiếu vuông góc của A xuống BD, điểm $M\left(\dfrac{9}{2}, 3\right)$ là trung điểm BC. Trung tuyến kẻ từ A của tam giác ADH là $(d): 4x + y - 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng BC.*

$\boxed{\mathbf{Y}}\, HD3 - tr.10 / \boxed{\mathbf{N}}\, HD50 - tr.51$

HD 30. Có chìa khóa vàng là $I \in (C)$ rồi thì chỉ cần tham số hóa tọa độ của C là xong. Cần phải tìm tọa độ của E, H nữa.

ĐA: Xem $HD55 - tr.51$

HD 31. Chúc mừng em đã giải quyết được Đề thi HSG tỉnh Thái Bình năm học 2013 - 2014. BC là đường thẳng đi qua $P(0; -3)$ và tiếp xúc với cả hai đường tròn nên $d_{(I,BC)} = r_c$. **ĐA:** $BC : x = 0$, $BC : 3x + 4y + 12 = 0$

HD 32. Em tìm được I, C rồi phải không? Hãy chứng minh B, N đối xứng nhau qua AC.

ĐA: Xem $HD21 - tr.25$

HD 33. Gọi M là trung điểm BC. Hãy chứng minh G là trọng tâm tam giác ABM. Ngoài ra, cần sử dụng tính chất góc ở tâm của đường tròn.

$\boxed{\mathbf{Y}}HD25 - tr.26/\boxed{\mathbf{N}}HD52 - tr.51$

HD 34. Tính $\overrightarrow{BD}$ và so sánh với vectơ chỉ phương của EF.

$\boxed{\mathbf{Y}}HD53 - tr.51/\boxed{\mathbf{N}}HD20 - tr.25$

HD 35. Đường thẳng chứa 1 trong hai đường chéo sẽ tạo với (d) một góc 45^o nên có thể lấy $(\Delta) : x = a$. Giả sử $A \in (\Delta)$. Đường thẳng (d') đi qua tâm I của hình tròn, vuông góc với (d) sẽ đi qua tâm T của hình vuông. Hãy tìm tọa độ của A, T theo a. Từ đó suy ra tọa độ của D theo a.

ĐA: Xem $HD4 - tr.10$

HD 36. Hãy vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Em sẽ nhận ra điều thú vị. Đừng quên chứng minh điều mình nhìn thấy nhé.

ĐA: Xem $HD7 - tr.10$

HD 37. Em đã biết A, B nằm về cùng một phía so với d rồi chứ? Trong trường hợp $b)$ áp dụng BĐT tam giác cho tam giác ABM ta có

$$|MA - MB| \leq AB$$

Dấu "=" xảy ra khi nào?
ĐA Xem $HD16 - tr.25$

Thư giãn

BÀI THƠ VIẾT TẶNG EM

Bài thơ này anh viết tặng em
Người bạn đời anh hằng mong nhớ
Bài *tích phân* vừa làm ra kết quả
Đổi biến rồi, *truy hồi* tiếp mới xong.

Hà Nội bây giờ tiết đã sang đông
Em nhớ quàng khăn khi đi dạo phố
Thành phố lên đèn *không gian* rực rỡ
Phương và *chiều* em chỉ *vectơ* thôi.

Không gian yêu *tọa độ* xác định rồi
Phương trình bậc cao đường lối chung *hạ bậc*
Ta trở về kĩ năng thành thạo nhất
Bậc nhất, *bậc hai* em nổi tiếng một thời.

Đôi mắt em xanh, *ánh xạ* cuộc đời
Mỗi lần trao *vô hạn* lần hạnh phúc
Nghiệm ngoại lai làm sao mà có được
Anh biết rồi em *biến đổi tương đương*.

Lần dạo chơi nơi thành phố mờ sương
Đà Lạt thông reo bên đèo Ngoạn Mục
Anh với em chơi rút bài *xác suất*
Em hỏi anh *không gian mẫu* là gì?

Và rồi thời gian cứ mải miết đi
Anh là *đường xiên* nhận em *hình chiếu*
Ngọt bùi cùng chia, đắng cay cùng chịu
Gắn kết hai đầu, *đường vuông góc* cùng chung.

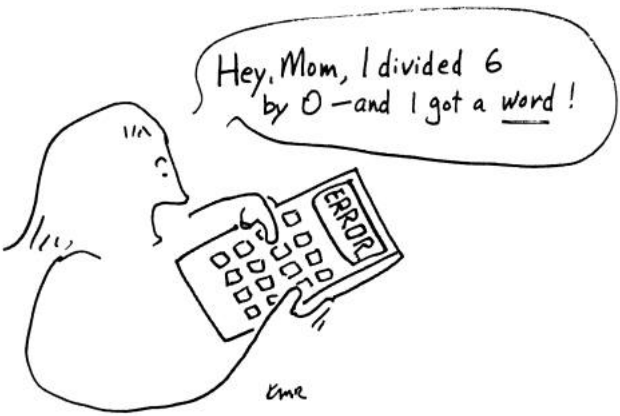
Anh tìm em bằng *đa thức đặc trưng*
Đạo hàm bậc hai biết rằng em ở đó
Có lần giận anh em bảo là không có
Giấc ngủ không thành *gián đoạn* suốt đêm thâu.

Ở hai đầu *trung tuyến* xa nhau
Hướng về *trọng tâm* tin ngày gặp mặt
Giá trị tuyệt đối bao giờ âm được
Và bao giờ anh khỏi nhớ thương em.

Anh gửi tình anh qua những con tem
Những lá thư vượt muôn trùng sóng gió
Mong đến trao em - người anh hằng mong nhớ
Bài thơ này anh viết tặng riêng em.

Đào Quang Điền

* * * * * * * * * * * * * * * * * * * **



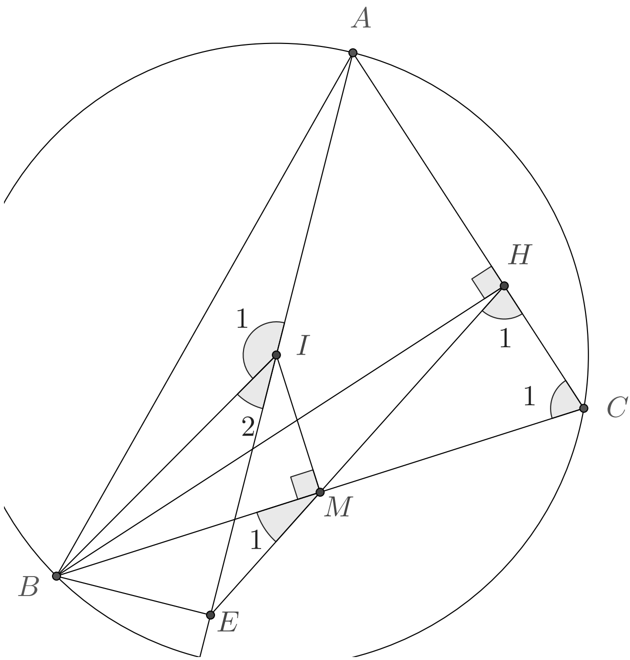
It's never too early to learn that you can't divide by zero!

* * * * * * * * * * * * * * * * * * * **

Con (lớp một) học bài, quay sang hỏi bố (một nhà toán học)
- Bố ơi, số tám viết như thế nào?
- Con viết dấu vô cùng rồi quay đi một góc pi trên 2.

HD 38. $E = AC \cap (d_2)$, $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AE}$. Bằng cách tham số hóa tọa độ, ta được C, tâm $I(3; -1)$, B là giao điểm của $3x - 4y - 3 = 0$ và $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 40$.
ĐA: $C(1; 5), B\left(\dfrac{33}{5}; \dfrac{21}{5}\right)$

HD 39. Hình vẽ dưới đây giúp em chứng minh H nằm trên đường tròn đường kính BC.



ĐA: $H\left(\dfrac{41}{13}; \dfrac{23}{13}\right)$, $BH : 2x - 3y - 1 = 0$, $B(-1; -1)$,$C(5; -1)$,$A(1; 5)$

HD 40. Chúc mừng em đã giải quyết được bài toán!
ĐA: $H(2; 0)$, $EH : x - y - 2 = 0$, $AC : x + y - 4 = 0$, $CD : x - y - 6 = 0$, $AH : x - 2 = 0$, $A(2; 2)$, $B(1; -1)$, $C(5; -1)$

Ví dụ 19. *Cho các điểm $A(1;1)$, $B(2;5)$, $C(4;7)$. Chứng minh tam giác ABC có góc A nhọn. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A sao cho: $d_{(B,d)} + d_{(C,d)}$ lớn nhất.* △

LỜI GIẢI (CÁCH 1).
Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (1;4); \overrightarrow{AC} = (3;6); \overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} = 27 > 0$$

Vậy góc A nhọn. Đường thẳng đi qua A và không có hệ số góc là: $d_0 : x = 1$.
Ta có:

$$d_{(B,d_0)} = 1; d_{(C,d_0)} = 3$$

Đường thẳng đi qua A, với hệ số góc k có phương trình:

$$d : kx - y - k + 1 = 0$$

Ta có:

$$d_{(B,d)} = \frac{|k-4|}{\sqrt{k^2+1}}; d_{(C,d)} = \frac{|3k-6|}{\sqrt{k^2+1}}$$

Ta có: $d_{(B,d_0)} + d_{(C,d_0)} = 4$. Mặt khác

$$f(k) = d_{(B,d)} + d_{(C,d)} = \frac{|k-4| + |3k-6|}{\sqrt{k^2+1}} = \begin{cases} \dfrac{10-4k}{\sqrt{k^2+1}} & khi \quad k < 2 \\ \dfrac{2k-2}{\sqrt{k^2+1}} & khi \quad 2 \le k < 4 \\ \dfrac{4k-10}{\sqrt{k^2+1}} & khi \quad k \ge 4 \end{cases}$$

Do đó:

$$f'(k) = \begin{cases} \dfrac{-10-4k}{\sqrt{(k^2+1)^2}} & khi \quad k < 2 \\ \dfrac{2k+2}{\sqrt{(k^2+1)^3}} & khi \quad 2 \le k < 4 \\ \dfrac{4k+10}{\sqrt{(k^2+1)^3}} & khi \quad k \ge 4 \end{cases} ; f'(k) = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{2}{5}$$

$$\lim_{k \to \pm\infty} f(k) = 4; f\left(-\frac{2}{5}\right) = 2\sqrt{29}; f(2) = \frac{2}{\sqrt{5}}; f(4) = \frac{6}{\sqrt{17}}$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(k)$

k	$-\infty$		$-\frac{2}{5}$		2		4		$+\infty$
$f'(k)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	‖	$+$	
$f(k)$	4	$\nearrow$	$2\sqrt{29}$	$\searrow$	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\nearrow$	$\frac{6}{\sqrt{17}}$	$\nearrow$	4

Dựa vào bảng biến thiên, ta có:

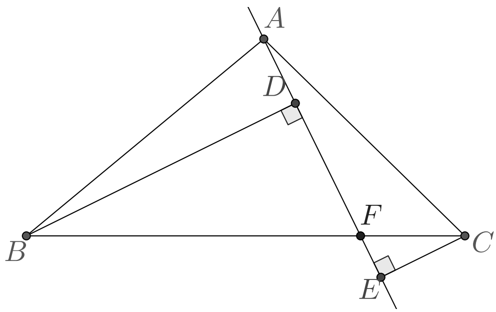
$$\max f(k) = f\left(-\frac{2}{5}\right) = 2\sqrt{29} > 4.$$

Do đó, phương trình đường thẳng cần tìm là: $y = -\dfrac{2}{5}x + \dfrac{7}{5}$. ■

NHẬN XÉT. Cách làm trên đây là cách làm "trâu bò". Khối lượng tính toán quá lớn. Ta cần tìm một cách làm khác nhẹ nhàng hơn.

Muốn vậy ta cần phân tích 2 trường hợp của d.

- **Trường hợp 1**. d cắt cạnh BC tại F.

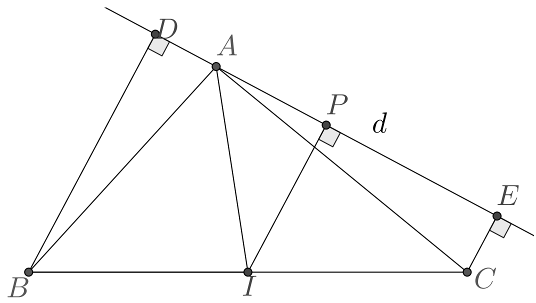


Khi đó:

$$d_{(B,d)} + d_{(C,d)} = BD + CE \leq BC$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $d \perp BC$. Tức là d chứa đường cao AH của tam giác.

- **Trường hợp 2**. d không cắt cạnh BC. Gọi I là trung điểm BC và D, E, P lần lượt là hình chiếu của B, C, I lên d. Khi đó tứ giác $BCED$ là hình thang và PI là đường trung bình của nó.



Dễ thấy
$$d_{(B,d)} + d_{(C,d)} = BD + CE = 2PI \leq 2AI$$
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $d \perp AI$.

Ta chỉ cần so sánh $2AI$ và BC là suy ra cách làm.

? Em hãy tự làm dựa theo nhận xét trên.

Ví dụ 20. *Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $A(5; -7)$, điểm C nằm trên đường thẳng $(d_1) : x - y + 4 = 0$. Đường thẳng đi qua đỉnh D và trung điểm của đoạn thẳng AB là $(d_2) : 3x - 4y - 23 = 0$. Tìm tọa độ của B và C biết điểm B có hoành độ dương.* △

Y $HD38 - tr.36$/**N** $HD15 - tr.25$

Ví dụ 21. *Cho tam giác ABC có đỉnh $A(3; 3)$, đường phân giác trong của góc A có phương trình $x - y = 0$. Điểm $I(2; 1)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC. Tìm toạ độ các đỉnh B và C biết rằng $BC = \dfrac{8}{\sqrt{5}}$ và góc $\widehat{BAC}$ nhọn.* △

Y $HD57 - tr.51$/**N** $HD12 - tr.11$

Ví dụ 22. *Cho đường thẳng* $d : x - 2y + 1 = 0$ *và hai điểm* $A(1;-1), B(2;0)$. *Tìm tọa độ điểm* M *thuộc đường thẳng* d *sao cho:*
a) $MA + MB$ *nhỏ nhất.*
b) $|MA - MB|$ *lớn nhất.* $\triangle$

$\boxed{\mathbf{Y}}HD16 - tr.25/\boxed{\mathbf{N}}HD14 - tr.11$

Ví dụ 23. *Cho đường tròn* $(C) : x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$ *và đường thẳng* $(d) : x - y = 0$. *Tìm tọa độ* A, B *thuộc* d *và điểm* E, D *thuộc* (C) *sao cho* $ABDE$ *là hình vuông.* $\triangle$

$\boxed{\mathbf{Y}}HD35 - tr.33/\boxed{\mathbf{N}}HD43 - tr.47$

Ví dụ 24. *Cho hình bình hành* $ABCD$ *có* $A(-2;-1)$. *Điểm* C *thuộc đường thẳng* $d : x - y - 3 = 0$. *Gọi* H, K, E *lần lượt là hình chiếu của* A *lên* CD, BD, BC. *Đường tròn ngoại tiếp tam giác* HEK *là* $(C) : x^2 + y^2 + x + 4y + 3 = 0$. *Tìm tọa độ các đỉnh* B,C,D. $\triangle$

Chìa khóa của bài toán này là có một điểm đặc biệt nằm trên đường tròn (C). Em hãy tìm điểm đó.

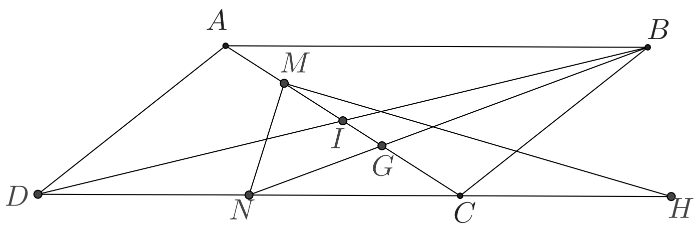
$\boxed{\mathbf{Y}}HD17 - tr.25/\boxed{\mathbf{N}}HD59 - tr.51$

Ví dụ 25. *Cho tam giác* ABC *vuông cân tại* A. *Điểm* K *thuộc đoạn* BC *sao cho* $CK = 3KB$. *Điểm* G *thỏa mãn* $\overrightarrow{AG} = -2\overrightarrow{GK}$. *Điểm* D *thuộc* BC *sao cho* $GB = GD$. *Biết* $D(7;-2)$, *phương trình* AK *là* $3x - y - 13 = 0$ *và điểm* A *có tung độ âm. Viết phương trình* AB $\triangle$

$\boxed{\mathbf{Y}}HD52 - tr.51/\boxed{\mathbf{N}}HD9 - tr.10$

Ví dụ 26. *Cho hình bình hành* $ABCD$ *có* N *là trung điểm cạnh* CD *và đường thẳng* $BN : 13x - 10y + 13 = 0$, *điểm* $M(-1;2)$ *thuộc đoạn* AC *sao cho* $AC = 4AM$. *Gọi* H *là điểm đối xứng của* N *qua* C. *Tìm tọa độ các đỉnh của hình bình hành, biết rằng* $3CA = 2AB$ *và điểm* H *thuộc đường thẳng* $\Delta : 2x - 3y = 0$. $\triangle$

LỜI GIẢI.
Ta có: $d_{(M,BN)} = \dfrac{20}{\sqrt{269}}$.
Giả sử $H(3h; 2h)$. Đặt $I = AC \cap BD, G = AC \cap BN$. Dễ thấy G là trọng tâm tam giác BCD. Từ đó ta có:



$$\begin{cases} CG = \dfrac{2}{3}CI = \dfrac{1}{3}AC \\ AM = \dfrac{1}{4}AC \end{cases} \Rightarrow MG = \frac{5}{12}AC$$

Do đó:

$$CG = \frac{4}{5}MG \Rightarrow d_{(C,BN)} = \frac{4}{5}d_{(M,BN)} \Rightarrow d_{(H,BN)} = 2d_{(C,BN)} = \frac{32}{\sqrt{269}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|39a - 20a + 13|}{\sqrt{269}} = \frac{32}{\sqrt{269}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -\dfrac{45}{19} \end{array}\right.$$

Vì H và M nằm khác phía đối với BN nên $H(3; 2)$.
Mặt khác:

$$CM = \frac{3}{4}AC = \frac{2}{4}AB = \frac{1}{2}CD = CN = CH$$

nên tam giác MHN vuông tại M.
Ta có:

$$MH : y - 2 = 0; MN : x + 1 = 0, N(-1; 0), C(1; 1), D(-3; -1)$$

Mà $\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{MA}$ nên $A\left(-\dfrac{5}{3}; \dfrac{7}{3}\right)$. Do đó $I\left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{5}{3}\right), B\left(\dfrac{7}{3}; \dfrac{13}{3}\right)$. ■

Thư giãn

THƠ TẶNG NGƯỜI YÊU TOÁN

Hoàng Ngọc Thế

Em chả thích người học toán đâu
Vì anh cứ *định chuẩn* trong đầu
Điều kiện, *giới hạn* và *quy tắc*
Em có ... *vô cùng* đến thế đâu

Em chả yêu người làm toán đâu
Epsilon thì ai bảo là giàu
Phần ảo có ai cho là thật
Định lý có gì lãng mạn đâu.

Em chả lấy người dạy toán đâu
Vì anh chỉ *nguyên tố cùng nhau*
Ước chung mỗi *một* sao mà đủ
Chia hết, lấy gì để mai sau.

Em chả bỏ người yêu toán đâu
Theo anh, em tính chuyện trầu cau
Yêu toán, yêu thơ thì em biết
Anh sẽ yêu em đến bạc đầu.

GIẢ SỬ

Ta có, *giả sử* là câu cửa miệng của người học toán ...

Các nhà khoa học tổ chức một thí nghiệm để chứng minh về ảnh hưởng của nghề nghiệp đến hành vi ứng xử. Họ đưa một kỹ sư, một nhà vật lý và một nhà toán học vào các phòng riêng biệt trong đó có một hộp thức ăn nhưng lại không có cái mở hộp.

Một ngày sau, các căn phòng được mở ra lần lượt. Trong phòng thứ nhất, anh kỹ sư đang ngáy khò khò, với một cái hộp méo mó trống rỗng vì đã được mở ra. Khi được hỏi, anh ta giải thích rằng khi đói, anh ta đập cái hộp cho đến vỡ ra thì thôi.

Trong căn phòng thứ hai, nhà vật lý đang đọc các đẳng thức với cái hộp được mở ra từ phía đáy. Khi được hỏi, anh ta giải thích rằng vì quá đói đã nghiên cứu những điểm chịu áp lực của hộp và tác dụng lực lên, và thế là bụp.

Trong căn phòng thứ ba, nhà toán học đang toát mồ hôi, mồm lẩm bẩm:
- *Giả sử rằng có cái mở hộp, giả sử rằng có cái mở hộp...*

HỎI ĐƯỜNG PYTHAGORAS

Ví dụ 27. *Cho tam giác ABC có:*

$$AB : x - y + 2 = 0; AC : 2x + y + 1 = 0; BC : 4x - y - 7 = 0$$

Lập phương trình đường thẳng (d) *đi qua điểm* $M\left(\dfrac{3}{2}; 6\right)$ *và chia tam giác* ABC *thành hai phần có diện tích bằng nhau.* △

LỜI GIẢI.

Ta có:

$$A(-1; 1); B(3; 5); C(1; -3); S_{ABC} = 12$$

$$\sin\widehat{ABC} = \frac{3}{\sqrt{34}}; \sin\widehat{BAC} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Đường thẳng (d) cần tìm chia tam giác ABC thành 2 phần có diện tích bằng 6. Dễ thấy:

$$\left(\frac{3}{2} - 6 + 2\right)(1 + 3 + 2) < 0$$

nên C và M ở hai phía khác nhau so với AB. Vậy đường thẳng (d) hoặc cắt AB và AC hoặc cắt AB và BC.

Trường hợp 1: (d) cắt AB và AC.

Giả sử (d) cắt AB tại $D(d; d + 2)$,(với $-1 < d < 3$), (d) cắt AC tại $E(e; -1 - 2e)$,(với $-1 < e < 1$). Ta có:

$$AD = \sqrt{2(d + 1)^2}; AE = \sqrt{5(e + 1)^2}$$

$$S_{\Delta ADE} = \frac{1}{2}.AD.AE.\sin\widehat{BAC} = 6 \Leftrightarrow (d + 1)^2.(e + 1)^2 = 16$$

Mặt khác, do $D, E, M \in (d)$ nên $\overrightarrow{DM}$ cùng phương $\overrightarrow{EM}$. Ta có

$$\frac{3 - 2d}{3 - 2e} = \frac{4 - d}{7 + 2e}$$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (d + 1)^2.(e + 1)^2 = 16 \\ (3 - 2d)(7 + 2e) = (4 - d)(3 - 2e) \end{cases}$$

Giải hệ ta được $\begin{cases} d = \dfrac{-17+4\sqrt{34}}{5} \\ e = \dfrac{-2+\sqrt{34}}{5} \end{cases}$. Vậy

$$D\left(\frac{-17+4\sqrt{34}}{5}; \frac{-7+4\sqrt{34}}{5}\right); E\left(\frac{\sqrt{34}-2}{5}; \frac{-1-2\sqrt{34}}{5}\right)$$

Ta có phương trình đường thẳng cần tìm:

$$(d) : (6-6\sqrt{34})x + (3\sqrt{34}-15)y + 81 - 9\sqrt{34} = 0$$

Trường hợp 2: (d) cắt AB và BC

Giả sử (d) cắt AB tại $D(d; d+2)$ (với $-1 < d < 3$), (d) cắt BC tại $F(f; 4f-7)$ (với $1 < f < 3$) Tương tự trường hợp 1 ta có:

$$\begin{cases} d = \dfrac{27-2\sqrt{106}}{5} \\ f = \dfrac{15-\sqrt{106}}{7} \end{cases}$$

Trường hợp này bị loại vì $f < 1$. ■

Ví dụ 28. *Cho tam giác ABC có trực tâm $H(-1;4)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $I(-3;0)$, trung điểm BC là $M(0;-3)$. Viết phương trình đường thẳng AB biết B có hoành độ dương.* △

Y $HD10 - tr.11$/**N** $HD26 - tr.26$

Ví dụ 29. *Cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm C thuộc đường thẳng $d: 2x+y+5=0$ và $A(-4;8)$. Gọi M là điểm đối xứng với B qua C, N là hình chiếu của B lên MD. Tìm tọa độ của B, C, biết rằng $N(5;-4)$.* △

Y $HD21 - tr.25$/**N** $HD54 - tr.51$

Ví dụ 30. *Cho tam giác ABC có $B\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. Đường tròn nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạch BC, CA, AB tương ứng tại D, E, F. Cho $D(3;1)$ và $EF: y-3=0$. Tìm tọa độ đỉnh A biết A có tung độ dương.* △

$\boxed{\textbf{Y}} HD20 - tr.25 / \boxed{\textbf{N}} HD5 - tr.10$

Ví dụ 31. *Cho $a + 2b + 4 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

$$S = \sqrt{a^2 + b^2 - 2a - 2b + 2} + \sqrt{a^2 + b^2 - 4a + 2b + 5}$$

△

Sao trong chuyên đề hình học giải tích lại có một bài đại số ở đây nhỉ? Hơi lạ đấy, nhưng nếu đề bài không cho a, b mà cho x, y thì em sẽ thấy nó giống cái gì?

$\boxed{\textbf{Y}} HD11 - tr.11 / \boxed{\textbf{N}} HD56 - tr.51$

Ví dụ 32. *Cho tam giác ABC có đường cao AH. Tam giác ACH ngoại tiếp đường tròn $(T) : x^2 + y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$, điểm $J(-1; -1)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABH. Viết phương trình đường thẳng BC.* △

Đây là một bài toán khó vì giả thiết đã cho có vẻ rời rạc và không liên quan đến điều cần tìm. Tuy nhiên, hãy vẽ hình và nêu nhận xét về độ dài các đoạn JH, JI (I là tâm của (T)) so với bán kính hai đường tròn và tính góc $\widehat{IHJ}$.

$\boxed{\textbf{Y}} HD58 - tr.51 / \boxed{\textbf{N}} HD22 - tr.26$

Ví dụ 33. *Cho hai đường tròn $(C_1) : x^2 + y^2 = 1$, $(C_2) : x^2 + y^2 = 4$ và điểm $A(1; 0)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc đường tròn (C_1), điểm B thuộc đường tròn (C_2) để tam giác ABC nhận gốc tọa độ O làm trực tâm.* △

$\boxed{\textbf{Y}} HD27 - tr.26 / \boxed{\textbf{N}} HD51 - tr.51$

HD 41. **ĐA:** $BC: 2x + y - 12 = 0$, $BC: 2x + 8y - 33 = 0$

HD 42. Em tìm được tọa độ của C chưa? Có A, C thì tìm được tâm I của hình vuông. Dựa vào tính chất của I, hãy viết phương trình một đường thẳng và một đường tròn đi qua B.

ĐA $HD38 - tr.36$

HD 43. Em đã vẽ hình thử và tìm được phương trình của một trong hai đường chéo chưa? Hãy tìm thêm phương trình một đường thẳng đi qua tâm của hình vuông nữa. Hãy tham số hóa tọa độ các đỉnh.

$\boxed{\textbf{Y}} HD4 - tr.10 / \boxed{\textbf{N}} HD35 - tr.33$

HD 44. Có G, H, K thì dễ dàng tìm được D, E, F. Viết được phương trình các cạnh và tìm được tọa độ các đỉnh.

ĐA: Xem $HD1 - tr.10$

HD 45. Em tìm được tọa độ trực tâm H rồi phải không? Tiếp theo hãy viết phương trình EH, AC, CD, AH và tìm được tọa độ của ba đỉnh.

ĐA: Xem $HD40 - tr.36$

HD 46. B, C là giao điểm của đường tròn đường kính KF với đường tròn tâm I. Ngoài ra trung điểm J của KF cũng thuộc đường tròn tâm I. Vậy ta có thể tìm được B, C. AB đối xứng với BC qua BK.

ĐA: Xem $HD57 - tr.51$

HD 47. Gọi (C) là đường tròn ngoại tiếp tam giác. Giả sử $K = AI \cap (C)$. Khi đó $IK \perp BC$. Gọi $H = BC \perp IK$. Em có thể dựa vào độ dài BC để tìm H.

ĐA: Xem $HD57 - tr.51$

HD 48. Hãy vẽ hình và chỉ ra một đường thẳng vuông góc với đường thẳng AC.

$\boxed{\textbf{Y}} HD2 - tr.10 / \boxed{\textbf{N}} HD19 - tr25$

4 Bài tập tự luyện

1. Cho đường thẳng d và đường tròn (C):

$$d : x - y + 1 = 0, (C) : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$$

và điểm $P(-1;1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (d) sao cho từ M kẻ tới (C) hai tiếp tuyến MA, MB (A, B là các tiếp điểm) đồng thời khoảng cách từ P tới đường thẳng AB lớn nhất.

ĐA $M(3,4)$

2. Cho tam giác ABC cân tại A, biết phương trình các đường thẳng AB, BC lần lượt là $x + 3y + 5 = 0$ và $x - y + 1 = 0$, đường thẳng AC đi qua điểm $M(3;0)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác.

3. Cho tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp $I(-2;1)$ và $\widehat{AIB} = 90^o$, chân đường cao kẻ từ A đến BC là $D(-1;-1)$, đường thẳng AC đi qua điểm $M(-1;4)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B biết rằng đỉnh A có hoành độ dương.

ĐA $A(1,5), B(2,-2)$

4. Cho tam giác ABC có trực tâm $H(2;0)$, trung tuyến $CM : 3x + 7y - 8 = 0$. Trung trực của BC là $d : x - 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm A.

ĐA $A(2;2), A\left(2;\dfrac{16}{5}\right)$

5. Cho ΔABC, phân giác trong AD;$x + y + 2 = 0$, đường cao BH: $2x - y + 1 = 0$. AB qua $M(1;1)$; $S_{ABC} = \dfrac{27}{4}$. Tìm A, B, C

6. Cho hình vuông $ABCD$ có M là trung điểm AB, đường thẳng DM có phương trình $2x - y + 1 = 0$ và điểm $C(1;-1)$. Tìm tọa độ điểm D

7. Cho 3 đường thẳng:

$$d_1 : 3x - 2y - 4 = 0, d_2 : x + y - 6 = 0, d_3 : x - 3 = 0$$

Tìm tọa độ điểm A, C thuộc d_3, B thuộc d_1, D thuộc d_2 sao cho $ABCD$ là hình vuông.

ĐA: $B(4;4), D(2;4), A, C \in \{(3;3),(3;5)\}$

8. Tam giác ABC trực tâm $H(2,1)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $I(1,0)$, trung điểm BC thuộc đường thẳng $(d) : x - 2y - 1 = 0$. Tìm tọa độ B, C biết đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC đi qua điểm $E(6,-1)$ và hoành độ điểm B nhỏ hơn 4.

ĐA: $b(2;3)$,$C(4;-1)$

9. Cho tam giác ABC cân tại B nộp tiếp đường tròn (C) tâm $I(0;5)$. Đường thẳng BI cắt đường tròn (C) tại $M(5;0)$. Đường cao kẻ từ C cắt đường tròn (C) tại $D\left(-\frac{17}{5};-\frac{6}{5}\right)$. Tìm tọa độ A, B, C biết hoành độ điểm A dương.

ĐA: $C(7,4)$, $A(1,-2)$

10. Cho đường thẳng $d : x + y + 2 = 0$ và $A(2;1)$, $B(-1;-3)$, $C(1;3)$. Tìm M thuộc d sao cho:
    (a) $|MA - MB|$ lớn nhất.
    (b) $MA^2 + MB^2 - MC^2$ nhỏ nhất.
    (c) $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

11. Cho tam giác ABC có $A \in Ox (0 < x_A < 2,5)$. Hai đường cao hạ từ B, C có phương trình lần lượt là

$$(d_1) : x - y + 1 = 0; (d_2) : 2x + y - 4 = 0.$$

Tìm tọa độ A, B, C để diện tích tam giác ABC lớn nhất.

ĐA: $A\left(\frac{1}{2};0\right), B\left(-\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right); C\left(\frac{7}{2};-3\right)$

12. Cho tam giác ABC và đường thẳng $\Delta: x-3y-1=0$. Giả sử $D\left(4;\frac{7}{2}\right)$, $E\left(\frac{14}{5};\frac{19}{10}\right)$, $N(3;3)$ theo thứ tự là chân đường cao từ A, B và trung điểm AB. Tìm tọa độ các đỉnh tam giác ABC, biết trung điểm M của BC nằm trên Δ và hoành độ điểm M nhỏ hơn hoặc bằng 4.

13. Cho tam giác ABC có trực tâm $H(3;0)$và trung điểm của BC là $I(6;1)$. Đường thẳng $AH: x+2y-3=0$. Gọi D, E lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C của tam giác ABC. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết đường thẳng $DE: x-2=0$ và điểm D có tung độ dương.

ĐA: $A(-1;2), B(4;-3), C(8;5)$

HD 49. Em chứng minh $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{IM}$ được chưa? Hai tam giác ABH, MNI đồng dạng (N là trung điểm AC). Điểm B là giao điểm của BC và đường tròn tâm I.

ĐA: Xem $HD10 - tr.11$

HD 50. Có 1 yếu tố vuông góc "quyết định" bài toán. Em hãy vẽ hình và tự phát hiện nó.

$\boxed{\mathbf{Y}}HD3 - tr.10/\boxed{\mathbf{N}}HD23 - tr.26$

HD 51. Bài này nên sử dụng hệ số góc để làm cho tiện. Gọi k là hệ số góc của đường thẳng OB. Hãy tìm tọa độ B, C theo k.

$\boxed{\mathbf{Y}}HD27 - tr.26/\boxed{\mathbf{N}}HD8 - tr.10$

HD 52. Sử dụng hai tính chất $GA = GD = GB$ và $DG \perp AK$ ta viết được phương trình GD, tìm được tọa độ G, A, K, B.

ĐA: Xem $HD25 - tr.26$

HD 53. ĐA: $A\left(3; \dfrac{13}{3}\right)$

HD 54. Gọi I là tâm hình chữ nhật. Em hãy chứng minh $IN = IA$. Từ đó tìm được I, C.

$\boxed{\mathbf{Y}}HD21 - tr.25/\boxed{\mathbf{N}}HD32 - tr.33$

HD 55. ĐA: $C_1(2; -1)$, $D_1, B_1 \in \{(4; 1), (-4; 3)\}$, $C_2(-1; -4)$,B_2, $D_2 \in \{(-1; 0), (-2; -5)\}$

HD 56. Giả thiết của đề bài giống phương trình một đường thẳng, S giống như tổng của hai đoạn thẳng. Em có thấy bài này quen quen không?

$\boxed{\mathbf{Y}}HD18 - tr.25/\boxed{\mathbf{N}}HD11 - tr.11$

HD 57. ĐA: $C(0; 2)$, $B\left(\dfrac{8}{5}; -\dfrac{6}{5}\right)$

HD 58. Đường thẳng BC là tiếp tuyến chung của hai đường tròn tâm I, J. Ngoài ra, $P = BC \cap IJ$. Em hãy tìm tọa độ P.

$\boxed{\mathbf{Y}}HD31 - tr.33/\boxed{\mathbf{N}}HD13 - tr.11$

HD 59. Gọi I là tâm hình bình hành. Em hãy chứng minh $I \in (C)$.

$\boxed{\mathbf{Y}}HD30 - tr.33/\boxed{\mathbf{N}}HD17 - tr.25$

Mục lục

1 Lý thuyết chung **5**

1.1 Hệ tọa độ . . . 5

1.2 Phương trình đường thẳng . . . 5

1.2.1 Vectơ chỉ phương và vectơ pháp tuyến của đường thẳng: . . . 5

1.2.2 Bốn loại phương trình đường thẳng . . . 6

1.2.3 Vị trí tương đối của 2 điểm và 1 đường thẳng . . . 7

1.2.4 Chùm đường thẳng . . . 7

1.3 Góc và khoảng cách . . . 7

1.4 Phương trình đường tròn . . . 8

1.5 Phương trình Elip . . . 9

2 Một số kĩ thuật cơ bản **12**

2.1 Kĩ thuật xác định tọa độ điểm . . . 12

2.1.1 Dựa vào hệ điểm . . . 12

2.1.2 Xác định tọa độ giao điểm của hai đường . . . 13

2.1.3 Điểm thuộc đường . . . 15

2.2 Tìm tọa độ hình chiếu của một điểm lên một đường thẳng . . . 15

2.3 Tìm tọa độ điểm đối xứng của một điểm qua một đường thẳng . . . 17

2.4 Viết phương trình đường thẳng đi qua 1 điểm, cách 1 điểm cho trước một khoảng cho trước . . . 18

2.5 Viết phương trình đường thẳng đi qua 1 điểm, tạo với 1 đường thẳng khác một góc cho trước . . . 19

2.6 Viết phương trình đường phân giác trong của một góc . . . 20

2.7 Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm . . . 23

2.8 Viết phương trình đường thẳng đi qua hai tiếp điểm của đường tròn . . . 23

3 Phương pháp giải toán **27**

4 Bài tập tự luyện **48**