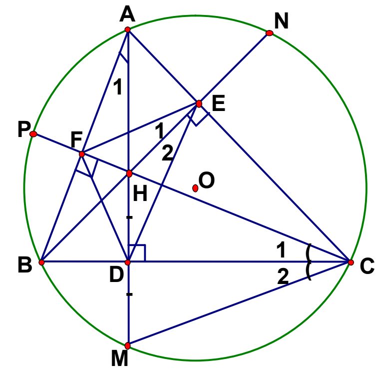
Bài 1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H và cắt đường tròn (O) lần lượt tại M, N, P.

Chứng minh rằng:

1. Tứ giác CEHD, nội tiếp .
2. Bốn điểm B, C, E, F cùng nằm trên một đường tròn.
3. AE.AC = AH.AD; AD.BC = BE.AC.
4. H và M đối xứng nhau qua BC.
5. Xác định tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.



Lời giải:

1. Xét tứ giác CEHD ta có:

$\angle$ CEH = 90^0 (Vì BE là đường cao)

$\angle$ CDH = 90^0 (Vì AD là đường cao)

=> $\angle$ CEH + $\angle$ CDH = 180^0

Mà $\angle$ CEH và $\angle$ CDH là hai góc đối của tứ giác CEHD , Do đó CEHD là tứ giác nội tiếp

2. Theo giả thiết: BE là đường cao => BE $\perp$ AC => $\angle$BEC = 90^0.

CF là đường cao => CF $\perp$ AB => $\angle$BFC = 90^0.

Như vậy E và F cùng nhìn BC dưới một góc 90^0 => E và F cùng nằm trên đường tròn đường kính BC.

Vậy bốn điểm B,C,E,F cùng nằm trên một đường tròn.

3. Xét hai tam giác AEH và ADC ta có: $\angle$ AEH = $\angle$ ADC = 90^0 ; Â là góc chung

=> Δ AEH ~ ΔADC => $\frac{AE}{AD}=\frac{AH}{AC}$ => AE.AC = AH.AD.

* Xét hai tam giác BEC và ADC ta có: $\angle$ BEC = $\angle$ ADC = 90^0 ; $\angle$C là góc chung

=> Δ BEC ~ ΔADC => $\frac{BE}{AD}=\frac{BC}{AC}$ => AD.BC = BE.AC.

4. Ta có $\angle C_1 = \angle A_1$ (vì cùng phụ với góc ABC)

$\angle C_2 = \angle A_1$ (vì là hai góc nội tiếp cùng chắn cung BM)

=> $\angle C_1 = \angle C_2$ => CB là tia phân giác của góc HCM; lại có CB $\perp$ HM => Δ CHM cân tại C

=> CB cũng là đương trung trực của HM vậy H và M đối xứng nhau qua BC.

5. Theo chứng minh trên bốn điểm B,C,E,F cùng nằm trên một đường tròn

=> $\angle C_1 = \angle E_1$ (vì là hai góc nội tiếp cùng chắn cung BF)

Cũng theo chứng minh trên CEHD là tứ giác nội tiếp

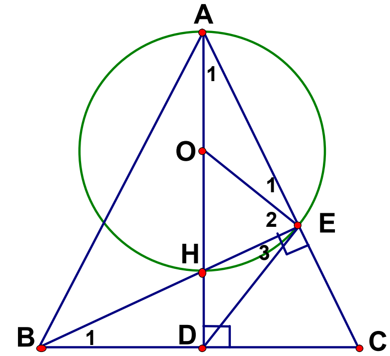
⇨ $\angle C_1 = \angle E_2$ (vì là hai góc nội tiếp cùng chắn cung HD)

⇨ $\angle E_1 = \angle E_2$ => EB là tia phân giác của góc FED.

Chứng minh tương tự ta cũng có FC là tia phân giác của góc DFE mà BE và CF cắt nhau tại H do đó H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

Bài 2. Cho tam giác cân ABC (AB = AC), các đường cao AD, BE, cắt nhau tại H. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE.

1. Chứng minh tứ giác CEHD nội tiếp .
2. Bốn điểm A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn.
3. Chứng minh ED = $\frac{1}{2}$BC.
4. Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).
5. Tính độ dài DE biết DH = 2 Cm, AH = 6 Cm.



Lời giải:

1. Xét tứ giác CEHD ta có:

$\angle$ CEH = 90^0 (Vì BE là đường cao)

$\angle$ CDH = 90^0 (Vì AD là đường cao)

=> $\angle$ CEH + $\angle$ CDH = 180^0

Mà $\angle$ CEH và $\angle$ CDH là hai góc đối của tứ giác CEHD , Do đó CEHD là tứ giác nội tiếp

2. Theo giả thiết: BE là đường cao => BE $\perp$ AC => $\angle$BEA = 90^0.

AD là đường cao => AD $\perp$ BC => $\angle$BDA = 90^0.

Như vậy E và D cùng nhìn AB dưới một góc 90^0 => E và D cùng nằm trên đường tròn đường kính AB.

Vậy bốn điểm A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn.

3. Theo giả thiết tam giác ABC cân tại A có AD là đường cao nên cũng là đường trung tuyến

=> D là trung điểm của BC. Theo trên ta có $\angle$BEC = 90^0 .

Vậy tam giác BEC vuông tại E có ED là trung tuyến => DE = $\frac{1}{2}$BC.

4. Vì O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE nên O là trung điểm của AH => OA = OE => tam giác AOE cân tại O => $\angle E_1 = \angle A_1$ (1).

Theo trên DE = $\frac{1}{2}$BC => tam giác DBE cân tại D => $\angle E_3 = \angle B_1$ (2)

Mà $\angle B_1 = \angle A_1$ (vì cùng phụ với góc ACB) => $\angle E_1 = \angle E_3$ => $\angle E_1 + \angle E_2 = \angle E_2 + \angle E_3$

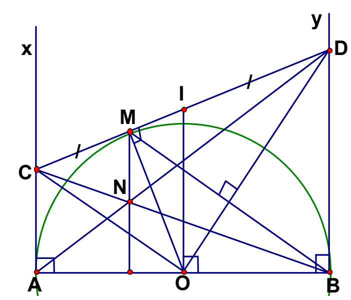
Mà $\angle E_1 + \angle E_2 = \angle BEA = 90^0$ => $\angle E_2 + \angle E_3 = 90^0 = \angle OED$ => DE $\perp$ OE tại E.

Vậy DE là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại E.

5. Theo giả thiết AH = 6 Cm => OH = OE = 3 cm.; DH = 2 Cm => OD = 5 cm. Áp dụng định lí Pitago cho tam giác OED vuông tại E ta có $ED^2 = OD^2 — OE^2 \Leftrightarrow ED^2 = 5^2 — 3^2 \Leftrightarrow$ ED = 4cm

<u>**Bài 3**</u> Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax , By lần lượt ở C và D. Các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N.

1. Chứng minh AC + BD = CD.
2. Chứng minh $\angle$COD = 90^0.
3. Chứng minh AC. BD = $\frac{AB^2}{4}$.
4. Chứng minh OC // BM
5. Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.
5. Chứng minh MN $\perp$ AB.
6. Xác định vị trí của M để chu vi tứ giác ACDB đạt giá trị nhỏ nhất.



<u>**Lời giải:**</u>

1. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: CA = CM; DB = DM => AC + BD = CM + DM.

Mà CM + DM = CD => AC + BD = CD

2. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: OC là tia phân giác của góc AOM; OD là tia phân giác của góc BOM, mà $\angle$AOM và $\angle$BOM là hai góc kề bù => $\angle$COD = 90^0.

3. Theo trên $\angle$COD = 90^0 nên tam giác COD vuông tại O có OM $\perp$ CD (OM là tiếp tuyến).

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có OM^2 = CM. DM,

Mà OM = R; CA = CM; DB = DM => AC. BD =R^2 => AC. BD = $\frac{AB^2}{4}$.

4. Theo trên $\angle$COD = 90^0 nên OC $\perp$ OD .(1)

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: DB = DM; lại có OM = OB =R => OD là trung trực của BM => BM $\perp$ OD .(2). Từ (1) Và (2) => OC // BM (Vì cùng vuông góc với OD).

5. Gọi I là trung điểm của CD ta có I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác COD đường kính CD có IO là bán kính.

Theo tính chất tiếp tuyến ta có AC $\perp$ AB; BD $\perp$ AB => AC // BD => tứ giác ACDB là hình thang. Lại có I là trung điểm của CD; O là trung điểm của AB => IO là đường trung bình của hình thang ACDB

$\Rightarrow$ IO // AC , mà AC $\perp$ AB => IO $\perp$ AB tại O => AB là tiếp tuyến tại O của đường tròn đường kính CD

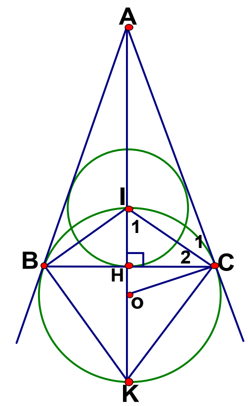
6. Theo trên AC // BD => $\frac{CN}{BN} = \frac{AC}{BD}$, mà CA = CM; DB = DM nên suy ra $\frac{CN}{BN} = \frac{CM}{DM}$

=> MN // BD mà BD $\perp$ AB => MN $\perp$ AB.

7. (HD): Ta có chu vi tứ giác ACDB = AB + AC + CD + BD mà AC + BD = CD nên suy ra chu vi tứ giác ACDB = AB + 2CD mà AB không đổi nên chu vi tứ giác ACDB nhỏ nhất khi CD nhỏ nhất , mà CD nhỏ nhất khi CD là khoảng cách giữ Ax và By tức là CD vuông góc với Ax và By. Khi đó CD // AB => M phải là trung điểm của cung AB.

<u>Bài 4</u> Cho tam giác cân ABC (AB = AC), I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A , O là trung điểm của IK.

1. Chứng minh B, C, I, K cùng nằm trên một đường tròn.
2. Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).
3. Tính bán kính đường tròn (O) Biết AB = AC = 20 Cm, BC = 24 Cm.



<u>Lời giải:</u> (HD)

1. Vì I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A nên BI và BK là hai tia phân giác của hai góc kề bù đỉnh B

Do đó BI $\perp$ BK hay $\angle IBK = 90^0$.

Tương tự ta cũng có $\angle ICK = 90^0$ như vậy B và C cùng nằm trên đường tròn đường kính IK do đó B, C, I, K cùng nằm trên một đường tròn.

2. Ta có $\angle C_1 = \angle C_2$ (1) (vì CI là phân giác của góc ACH.

$\angle C_2 + \angle I_1 = 90^0$ (2) (vì $\angle IHC = 90^0$).

$\angle I_1 = \angle$ ICO (3) (vì tam giác OIC cân tại O)

Từ (1), (2) , (3) => $\angle C_1 + \angle ICO = 90^0$ hay AC $\perp$ OC. Vậy AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

3. Từ giả thiết AB = AC = 20 Cm, BC = 24 Cm => CH = 12 cm.

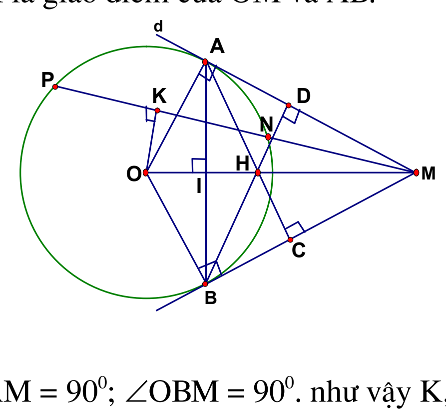
$AH^2 = AC^2 - HC^2$ => AH = $\sqrt{20^2 - 12^2}$ = 16 (cm)

CH^2 = AH.OH => OH = $\frac{CH^2}{AH} = \frac{12^2}{16}$ = 9 (cm)

OC = $\sqrt{OH^2 + HC^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225}$ = 15 (cm)

<u>Bài 5</u> Cho đường tròn (O; R), từ một điểm A trên (O) kẻ tiếp tuyến d với (O). Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kì (M khác A) kẻ cát tuyến MNP và gọi K là trung điểm của NP, kẻ tiếp tuyến MB (B là tiếp điểm). Kẻ AC $\perp$ MB, BD $\perp$ MA, gọi H là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của OM và AB.

1. Chứng minh tứ giác AMBO nội tiếp.
2. Chứng minh năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn .
3. Chứng minh OI.OM = R^2; OI. IM = IA^2.
4. Chứng minh OAHB là hình thoi.
5. Chứng minh ba điểm O, H, M thẳng hàng.
6. Tìm quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d



<u>Lời giải:</u>

1. (HS tự làm).

2. Vì K là trung điểm NP nên OK $\perp$ NP (quan hệ đường kính Và dây cung) => $\angle OKM = 90^0$. Theo tính chất tiếp tuyến ta có $\angle OAM = 90^0$; $\angle OBM = 90^0$. như vậy K, A, B cùng nhìn OM dưới một góc 90^0 nên cùng nằm trên đường tròn đường kính OM.

Vậy năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn.

3. Ta có MA = MB (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau); OA = OB = R

=> OM là trung trực của AB => OM $\perp$ AB tại I .

Theo tính chất tiếp tuyến ta có $\angle OAM = 90^0$ nên tam giác OAM vuông tại A có AI là đường cao.

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao => $OI.OM = OA^2$ hay $OI.OM = R^2$; và $OI. IM = IA^2$.

4. Ta có $OB \perp MB$ (tính chất tiếp tuyến) ; $AC \perp MB$ (gt) => OB // AC hay OB // AH.

$OA \perp MA$ (tính chất tiếp tuyến) ; $BD \perp MA$ (gt) => OA // BD hay OA // BH.

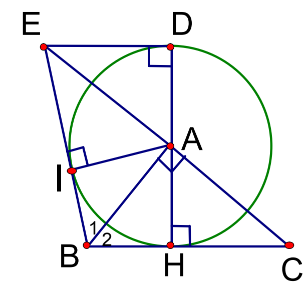
=> Tứ giác OAHB là hình bình hành; lại có OA = OB (=R) => OAHB là hình thoi.

5. Theo trên OAHB là hình thoi. => $OH \perp AB$; cũng theo trên $OM \perp AB$ => O, H, M thẳng hàng(Vì qua O chỉ có một đường thẳng vuông góc với AB).

6. (HD) Theo trên OAHB là hình thoi. => AH = AO = R. Vậy khi M di động trên d thì H cũng di động nhưng luôn cách A cố định một khoảng bằng R. Do đó quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d là nửa đường tròn tâm A bán kính AH = R

<u>**Bài 6**</u> Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm A bán kính AH. Gọi HD là đường kính của đường tròn (A; AH). Tiếp tuyến của đường tròn tại D cắt CA ở E.

1. Chứng minh tam giác BEC cân.
2. Gọi I là hình chiếu của A trên BE, Chứng minh rằng AI = AH.
3. Chứng minh rằng BE là tiếp tuyến của đường tròn (A; AH).
4. Chứng minh BE = BH + DE.



<u>**Lời giải:**</u> (HD)

1. Δ AHC = ΔADE (g.c.g) => ED = HC (1) và AE = AC (2).

Vì $AB \perp CE$ (gt), do đó AB vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến của ΔBEC => BEC là tam giác cân. => $\angle B_1 = \angle B_2$

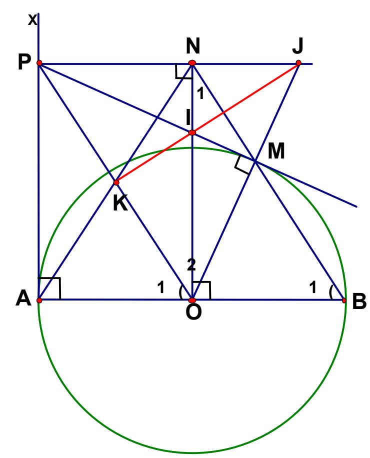
2. Hai tam giác vuông ABI và ABH có cạnh huyền AB chung, $\angle B_1 = \angle B_2$ => Δ AHB = ΔAIB => AI = AH.

3. AI = AH và $BE \perp AI$ tại I => BE là tiếp tuyến của (A; AH) tại I.

4. DE = IE và BI = BH => BE = BI+IE = BH + ED

<u>**Bài 7**</u> Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax và lấy trên tiếp tuyến đó một điểm P sao cho AP > R, từ P kẻ tiếp tuyến tiếp xúc với (O) tại M.

1. Chứng minh rằng tứ giác APMO nội tiếp được một đường tròn.
2. Chứng minh BM // OP.
3. Đường thẳng vuông góc với AB ở O cắt tia BM tại N. Chứng minh tứ giác OBNP là hình bình hành.
4. Biết AN cắt OP tại K, PM cắt ON tại I; PN và OM kéo dài cắt nhau tại J. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.



<u>**Lời giải:**</u>

1. (HS tự làm).

2.Ta có $\angle$ ABM nội tiếp chắn cung AM; $\angle$ AOM là góc ở tâm chắn cung AM => $\angle ABM = \frac{\angle AOM}{2}$ (1) OP là tia phân giác $\angle$ AOM (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau) => $\angle AOP = \frac{\angle AOM}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) => $\angle$ ABM = $\angle$ AOP (3)

Mà $\angle$ ABM và $\angle$ AOP là hai góc đồng vị nên suy ra BM // OP. (4)

3.Xét hai tam giác AOP và OBN ta có : $\angle PAO=90^0$ (vì PA là tiếp tuyến); $\angle NOB = 90^0$ (gt $NO \perp AB$).

=> $\angle PAO = \angle NOB = 90^0$; OA = OB = R; $\angle AOP = \angle OBN$ (theo (3)) => $\Delta AOP = \Delta OBN$ => OP = BN (5)

Từ (4) và (5) => OBNP là hình bình hành (vì có hai cạnh đối song song và bằng nhau).

4. Tứ giác OBNP là hình bình hành => PN // OB hay PJ // AB, mà $ON \perp AB$ => $ON \perp PJ$

Ta cũng có $PM \perp OJ$ (PM là tiếp tuyến), mà ON và PM cắt nhau tại I nên I là trực tâm tam giác POJ. (6)

Dễ thấy tứ giác AONP là hình chữ nhật vì có $\angle PAO = \angle AON = \angle ONP = 90^0$ => K là trung điểm của PO (t/c đường chéo hình chữ nhật). (6)

AONP là hình chữ nhật => ∠APO = ∠ NOP (so le) (7)

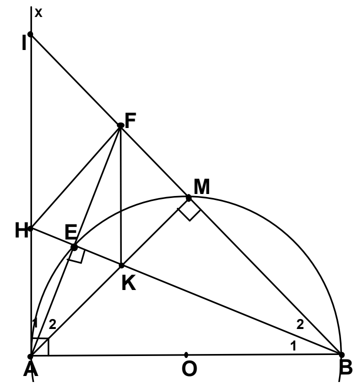
Theo t/c hai tiếp tuyến cắt nhau Ta có PO là tia phân giác ∠APM => ∠APO = ∠MPO (8).

Từ (7) và (8) => ΔIPO cân tại I có IK là trung tuyến đông thời là đường cao => IK ⊥ PO. (9)

Từ (6) và (9) => I, J, K thẳng hàng.

Bài 8 Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và điểm M bất kì trên nửa đường tròn (M khác A,B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến Ax. Tia BM cắt Ax tại I; tia phân giác của góc IAM cắt nửa đường tròn tại E; cắt tia BM tại F tia BE cắt Ax tại H, cắt AM tại K.

1) Chứng minh rằng: EFMK là tứ giác nội tiếp.
2) Chứng minh rằng: AI^2 = IM **.** IB.
3) Chứng minh BAF là tam giác cân.
4) Chứng minh rằng : Tứ giác AKFH là hình thoi.
5) Xác định vị trí M để tứ giác AKFI nội tiếp được một đường tròn.



Lời giải:

1. Ta có : ∠AMB = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> ∠KMF = 90^0 (vì là hai góc kề bù).

∠AEB = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> ∠KEF = 90^0 (vì là hai góc kề bù).

=> ∠KMF + ∠KEF = 180^0 . Mà ∠KMF và ∠KEF là hai góc đối của tứ giác EFMK do đó EFMK là tứ giác nội tiếp.

2. Ta có ∠IAB = 90^0 (vì AI là tiếp tuyến) => ΔAIB vuông tại A có AM ⊥ IB (theo trên). Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao => AI^2 = IM **.** IB.

3. Theo giả thiết AE là tia phân giác góc IAM => ∠IAE = ∠MAE => $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{ME}$ (*lí do □□*)

=> ∠ABE =∠MBE (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) => BE là tia phân giác góc ABF. (1)

Theo trên ta có ∠AEB = 90^0 => BE ⊥ AF hay BE là đường cao của tam giác ABF (2).

Từ (1) và (2) => BAF là tam giác cân. tại B .

4. BAF là tam giác cân. tại B có BE là đường cao nên đồng thời là đương trung tuyến => E là trung điểm của AF. (3)

Từ BE ⊥ AF => AF ⊥ HK (4), theo trên AE là tia phân giác góc IAM hay AE là tia phân giác ∠HAK (5)

Từ (4) và (5) => HAK là tam giác cân. tại A có AE là đường cao nên đồng thời là đương trung tuyến => E là trung điểm của HK. (6).

Từ (3) , (4) và (6) => AKFH là hình thoi (vì có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường).

5. (HD). Theo trên AKFH là hình thoi => HA // FK hay IA // FK => tứ giác AKFI là hình thang.

Để tứ giác AKFI nội tiếp được một đường tròn thì AKFI phải là hình thang cân.

AKFI là hình thang cân khi M là trung điểm của cung AB.

Thật vậy: M là trung điểm của cung AB => ∠ABM = ∠MAI = 45^0 (t/c góc nội tiếp). (7)

Tam giác ABI vuông tại A có ∠ABI = 45^0 => ∠AIB = 45^0 .(8)

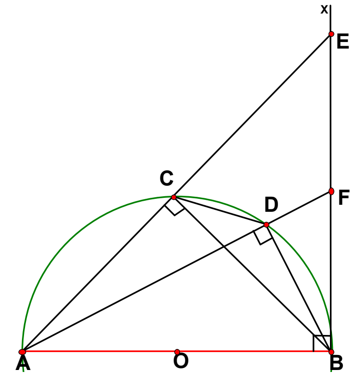
Từ (7) và (8) => ∠IAK = ∠AIF = 45^0 => AKFI là hình thang cân (hình thang có hai góc đáy bằng nhau).

Vậy khi M là trung điểm của cung AB thì tứ giác AKFI nội tiếp được một đường tròn.

Bài 9 Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Bx và lấy hai điểm C và D thuộc nửa đường tròn. Các tia AC và AD cắt Bx lần lượt ở E, F (F ở giữa B và E).

1. Chứng minh AC. AE không đổi.
2. Chứng minh ∠ ABD = ∠ DFB.
3. Chứng minh rằng CEFD là tứ giác nội tiếp.

Lời giải:



1. C thuộc nửa đường tròn nên $\angle ACB = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => $BC \perp AE$.
$\angle ABE = 90^0$ (Bx là tiếp tuyến) => tam giác ABE vuông tại B có BC là đường cao => AC. AE = AB^2 (hệ thức giữa cạnh và đường cao), mà AB là đường kính nên AB = 2R không đổi do đó AC. AE không đổi.

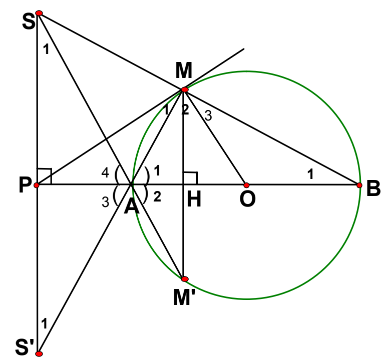
2. Δ ADB có $\angle ADB = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn).
=> $\angle ABD + \angle BAD = 90^0$ (vì tổng ba góc của một tam giác bằng 180^0)(1)
Δ ABF có $\angle ABF = 90^0$ (BF là tiếp tuyến).
=> $\angle AFB + \angle BAF = 90^0$ (vì tổng ba góc của một tam giác bằng 180^0) (2)
Từ (1) và (2) => $\angle ABD = \angle DFB$ (cùng phụ với $\angle BAD$)

3. Tứ giác ACDB nội tiếp (O) => $\angle ABD + \angle ACD = 180^0$.
$\angle ECD + \angle ACD = 180^0$ (Vì là hai góc kề bù) => $\angle ECD = \angle ABD$ (cùng bù với $\angle ACD$).
Theo trên $\angle ABD = \angle DFB$ => $\angle ECD = \angle DFB$. Mà $\angle EFD + \angle DFB = 180^0$ (Vì là hai góc kề bù) nên suy ra $\angle ECD + \angle EFD = 180^0$, mặt khác $\angle ECD$ và $\angle EFD$ là hai góc đối của tứ giác CDFE do đó tứ giác CEFD là tứ giác nội tiếp.

Bài 10 Cho đường tròn tâm O đường kính AB và điểm M bất kì trên nửa đường tròn sao cho AM < MB. Gọi M' là điểm đối xứng của M qua AB và S là giao điểm của hai tia BM, M'A. Gọi P là chân đường vuông góc từ S đến AB.

1.Gọi S' là giao điểm của MA và SP. Chứng minh rằng Δ PS'M cân.

2.Chứng minh PM là tiếp tuyến của đường tròn .



Lời giải:

1. Ta có $SP \perp AB$ (gt) => $\angle SPA = 90^0$; $\angle AMB = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => $\angle AMS = 90^0$. Như vậy P và M cùng nhìn AS dưới một góc bằng 90^0 nên cùng nằm trên đường tròn đường kính AS.
Vậy bốn điểm A, M, S, P cùng nằm trên một đường tròn.

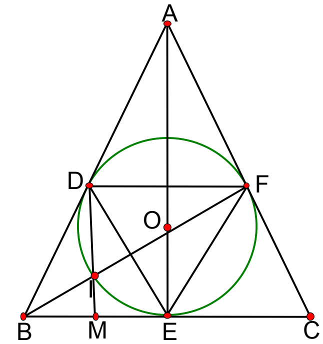
2. Vì M'đối xứng M qua AB mà M nằm trên đường tròn nên M' cũng nằm trên đường tròn => hai cung AM và AM' có số đo bằng nhau
=> $\angle AMM' = \angle AM'M$ (Hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) (1)
Cũng vì M'đối xứng M qua AB nên $MM' \perp AB$ tại H => MM'// SS' (cùng vuông góc với AB)
=> $\angle AMM' = \angle AS'S$; $\angle AM'M = \angle ASS'$ (vì so le trong) (2).
=> Từ (1) và (2) => $\angle AS'S = \angle ASS'$.
Theo trên bốn điểm A, M, S, P cùng nằm trên một đ/ tròn => $\angle ASP=\angle AMP$ (nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AP}$)
=> $\angle AS'P = \angle AMP$ => tam giác PMS' cân tại P.

3. Tam giác SPB vuông tại P; tam giác SMS' vuông tại M => $\angle B_1 = \angle S'_1$ (cùng phụ với $\angle S$). (3)
Tam giác PMS' cân tại P => $\angle S'_1 = \angle M_1$ (4)
Tam giác OBM cân tại O (vì có OM = OB =R) => $\angle B_1 = \angle M_3$ (5).
Từ (3), (4) và (5) => $\angle M_1 = \angle M_3$ => $\angle M_1 + \angle M_2 = \angle M_3 + \angle M_2$ mà $\angle M_3 + \angle M_2 = \angle AMB = 90^0$ nên suy ra $\angle M_1 + \angle M_2 = \angle PMO = 90^0$ => $PM \perp OM$ tại M => PM là tiếp tuyến của đường tròn tại M

Bài 11. Cho tam giác ABC (AB = AC). Cạnh AB, BC, CA tiếp xúc với đường tròn (O) tại các điểm D, E, F . BF cắt (O) tại I , DI cắt BC tại M. Chứng minh :

1. Tam giác DEF có ba góc nhọn.

2. DF // BC. **3**. Tứ giác BDFC nội tiếp. **4**. $\dfrac{BD}{CB} = \dfrac{BM}{CF}$



Lời giải:

1. (HD) Theo t/c hai tiếp tuyến cắt nhau ta có AD = AF => tam giác ADF cân tại A => ∠ADF = ∠AFD < 90^0 => sđ cung DF < 180^0 => ∠DEF < 90^0 (vì góc DEF nội tiếp chắn cung DE).

Chứng minh tương tự ta có ∠DFE < 90^0; ∠EDF < 90^0. Như vậy tam giác DEF có ba góc nhọn.

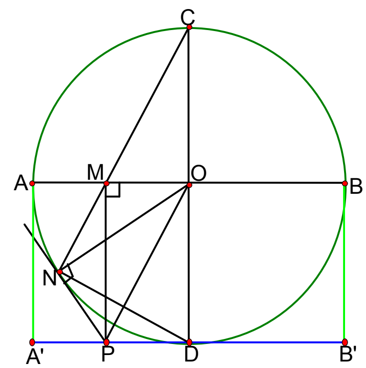
2. Ta có AB = AC (gt); AD = AF (theo trên) => $\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC}$ => DF // BC.

3. DF // BC => BDFC là hình thang lại có ∠ B = ∠C (vì tam giác ABC cân) => BDFC là hình thang cân do đó BDFC nội tiếp được một đường tròn .

4. Xét hai tam giác BDM và CBF Ta có ∠ DBM = ∠BCF (hai góc đáy của tam giác cân).
∠BDM = ∠BFD (nội tiếp cùng chắn cung DI); ∠ CBF = ∠BFD (vì so le) => ∠BDM = ∠CBF .
=> ΔBDM ~ΔCBF => $\frac{BD}{CB} = \frac{BM}{CF}$

Bài 12 Cho đường tròn (O) bán kính R có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên đoạn thẳng AB lấy điểm M (M khác O). CM cắt (O) tại N. Đường thẳng vuông góc với AB tại M cắt tiếp tuyến tại N của đường tròn ở P. Chứng minh :

1. Tứ giác OMNP nội tiếp.
2. Tứ giác CMPO là hình bình hành.
3. CM. CN không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.
4. Khi M di chuyển trên đoạn thẳng AB thì P chạy trên đoạn thẳng cố định nào.



Lời giải:

1. Ta có ∠OMP = 90^0 (vì PM ⊥ AB); ∠ONP = 90^0 (vì NP là tiếp tuyến).
Như vậy M và N cùng nhìn OP dưới một góc bằng 90^0 => M và N cùng nằm trên đường tròn đường kính OP => Tứ giác OMNP nội tiếp.

2. Tứ giác OMNP nội tiếp => ∠OPM = ∠ ONM (nội tiếp chắn cung OM)
Tam giác ONC cân tại O vì có ON = OC = R => ∠ONC = ∠OCN
=> ∠OPM = ∠OCM.

Xét hai tam giác OMC và MOP ta có ∠MOC = ∠OMP = 90^0; ∠OPM = ∠OCM => ∠CMO = ∠POM lại có MO là cạnh chung => ΔOMC = ΔMOP => OC = MP. (1)

Theo giả thiết Ta có CD ⊥ AB; PM ⊥ AB => CO//PM (2).

Từ (1) và (2) => Tứ giác CMPO là hình bình hành.

3. Xét hai tam giác OMC và NDC ta có ∠MOC = 90^0 (gt CD ⊥ AB); ∠DNC = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => ∠MOC =∠DNC = 90^0 lại có ∠C là góc chung => ΔOMC ~ΔNDC

=> $\frac{CM}{CD} = \frac{CO}{CN}$ => CM. CN = CO.CD mà CO = R; CD = 2R nên CO.CD = $2R^2$ không đổi => CM.CN =$2R^2$ không đổi hay tích CM. CN không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

4. (HD) Dễ thấy ΔOMC = ΔDPO (c.g.c) => ∠ODP = 90^0 => P chạy trên đường thẳng cố định vuông góc với CD tại D.

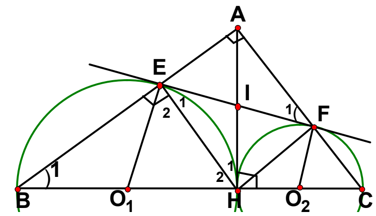
Vì M chỉ chạy trên đoạn thẳng AB nên P chỉ chạy trên doạn thẳng A' B' song song và bằng AB.

Bài 13 Cho tam giác ABC vuông ở A (AB > AC), đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điển A , Vẽ nửa đường tròn đường kính BH cắt AB tại E, Nửa đường tròn đường kính HC cắt AC tại F.

1. Chứng minh AFHE là hình chữ nhật.
2. BEFC là tứ giác nội tiếp.
3. AE. AB = AF. AC.

4. Chứng minh EF là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn .

Lời giải:



1. Ta có : $\angle BEH = 90^0$ (nội tiếp chắn nửc đường tròn)

=> $\angle AEH = 90^0$ (vì là hai góc kề bù). (1)

$\angle CFH = 90^0$ (nội tiếp chắn nửc đường tròn)

=> $\angle AFH = 90^0$ (vì là hai góc kề bù).(2)

$\angle EAF = 90^0$ (Vì tam giác ABC vuông tại A) (3)

Từ (1), (2), (3) => tứ giác AFHE là hình chữ nhật (vì có ba góc vuông).

2. Tứ giác AFHE là hình chữ nhật nên nội tiếp được một đường tròn =>$\angle F_1=\angle H_1$ (nội tiếp chắn cung AE) . Theo giả thiết AH $\perp$BC nên AH là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn (O_1) và (O_2) => $\angle B_1 = \angle H_1$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HE) => $\angle B_1= \angle F_1$ => $\angle EBC+\angle EFC = \angle AFE + \angle EFC$ mà $\angle AFE + \angle EFC = 180^0$ (vì là hai góc kề bù) => $\angle EBC+\angle EFC = 180^0$ mặt khác $\angle EBC$ và $\angle EFC$ là hai góc đối của tứ giác BEFC do đó BEFC là tứ giác nội tiếp.

3. Xét hai tam giác AEF và ACB ta có $\angle A = 90^0$ là góc chung; $\angle AFE = \angle ABC$ (theo Chứng minh trên)

=> $\Delta AEF \sim \Delta ACB$ => $\frac{AE}{AC}=\frac{AF}{AB}$ => AE. AB = AF. AC.

* ***HD cách 2***: *Tam giác AHB vuông tại H có HE $\perp$ AB => $AH^2 = AE.AB$ (*)*

Tam giác AHC vuông tại H có HF $\perp$ AC => $AH^2 = AF.AC$ (**)

Từ (*) và (**) => AE. AB = AF. AC

4. Tứ giác AFHE là hình chữ nhật => IE = EH => ΔIEH cân tại I => $\angle E_1 = \angle H_1$.

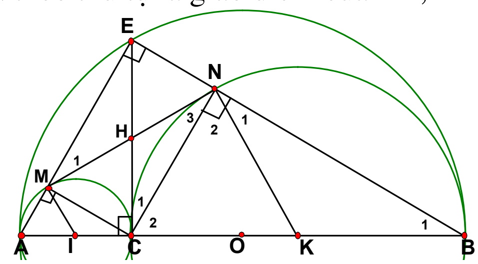
ΔO_1EH cân tại O_1 (vì có O_1E vàO_1H cùng là bán kính) => $\angle E_2 = \angle H_2$.

=> $\angle E_1 + \angle E_2 = \angle H_1 + \angle H_2$ mà $\angle H_1 + \angle H_2 = \angle AHB = 90^0$ => $\angle E_1 + \angle E_2 = \angle O_1EF = 90^0$

=> $O_1E \perp EF$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $O_2F \perp EF$. Vậy EF là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn .

Bài 14 Cho điểm C thuộc đoạn thẳng AB sao cho AC = 10 Cm, CB = 40 Cm. Vẽ về một phía của AB các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự là AB, AC, CB và có tâm theo thứ tự là O, I, K.
Đường vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn (O) tại E. Gọi M. N theo thứ tự là giao điểm của EA, EB với các nửa đường tròn (I), (K).



1.Chứng minh EC = MN.

2.Ch/minh MN là tiếp tuyến chung của các nửa đ/tròn (I), (K).

3.Tính MN.

4.Tính diện tích hình được giới hạn bởi ba nửa đường tròn

Lời giải:

1. Ta có: $\angle BNC= 90^0$(nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm K)

=> $\angle ENC = 90^0$ (vì là hai góc kề bù). (1)

$\angle AMC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửc đường tròn tâm I) => $\angle EMC = 90^0$ (vì là hai góc kề bù).(2)

$\angle AEB = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O) hay $\angle MEN = 90^0$ (3)

Từ (1), (2), (3) => tứ giác CMEN là hình chữ nhật => EC = MN (tính chất đường chéo hình chữ nhật)

2. Theo giả thiết EC $\perp$AB tại C nên EC là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn (I) và (K)

=> $\angle B_1 = \angle C_1$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CN). Tứ giác CMEN là hình chữ nhật nên => $\angle C_1= \angle N_3$

=> $\angle B_1 = \angle N_3$.(4) Lại có KB = KN (cùng là bán kính) => tam giác KBN cân tại K => $\angle B_1 = \angle N_1$ (5)

Từ (4) và (5) => $\angle N_1 = \angle N_3$ mà $\angle N_1 + \angle N_2 = \angle CNB = 90^0$ => $\angle N_3 + \angle N_2 = \angle MNK = 90^0$ hay MN $\perp$ KN tại N => MN là tiếp tuyến của (K) tại N.

Chứng minh tương tự ta cũng có MN là tiếp tuyến của (I) tại M,

Vậy MN là tiếp tuyến chung của các nửa đường tròn (I), (K).

3. Ta có $\angle AEB = 90^0$ (nội tiếp chắn nửc đường tròn tâm O) => ΔAEB vuông tại A có EC $\perp$ AB (gt)

=> $EC^2 = AC.\ BC \Leftrightarrow EC^2 = 10.40 = 400$ => EC = 20 cm. Theo trên EC = MN => MN = 20 cm.

4. Theo giả thiết AC = 10 Cm, CB = 40 Cm => AB = 50cm => OA = 25 cm

Ta có $S_{(o)} = \pi.OA^2 = \pi 25^2 = 625\pi$; $S_{(I)} = \pi.\ IA^2 = \pi.5^2 = 25\pi$; $S_{(k)} = \pi.KB^2 = \pi.\ 20^2 = 400\pi$.

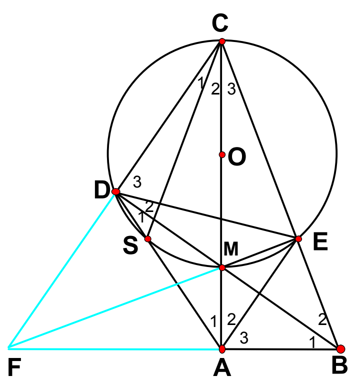
Ta có diện tích phần hình được giới hạn bởi ba nửa đường tròn là $S = \frac{1}{2}\ (S_{(o)} - S_{(I)} - S_{(k)})$

$$S = \frac{1}{2}(625\pi - 25\pi - 400\pi) = \frac{1}{2}.200\ \pi = 100\pi \approx 314\ (cm^2)$$

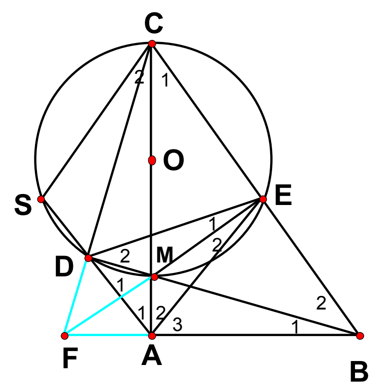
<u>Bài 15</u> Cho tam giác ABC vuông ở A. Trên cạnh AC lấy điểm M, dựng đường tròn (O) có đường kính MC. đường thẳng BM cắt đường tròn (O) tại D. đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại S.

1. Chứng minh ABCD là tứ giác nội tiếp .
2. Chứng minh CA là tia phân giác của góc SCB.
3. Gọi E là giao điểm của BC với đường tròn (O). Chứng minh rằng các đường thẳng BA, EM, CD đồng quy.
4. Chứng minh DM là tia phân giác của góc ADE.
5. Chứng minh điểm M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE.

<u>Lời giải:</u>



Hình a



Hình b

1. Ta có $\angle CAB = 90^0$ (vì tam giác ABC vuông tại A); $\angle MDC = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) => $\angle CDB = 90^0$ như vậy D và A cùng nhìn BC dưới một góc bằng 90^0 nên A và D cùng nằm trên đường tròn đường kính BC => ABCD là tứ giác nội tiếp.

2. ABCD là tứ giác nội tiếp => $\angle D_1 = \angle C_3$(nội tiếp cùng chắn cung AB).

$\angle D_1 = \angle C_3$ => $\overset{\frown}{SM} = \overset{\frown}{EM}$ => $\angle C_2 = \angle C_3$ (hai góc nội tiếp đường tròn (O) chắn hai cung bằng nhau)

=> CA là tia phân giác của góc SCB.

3. Xét ΔCMB Ta có BA$\perp$CM; CD $\perp$ BM; ME $\perp$ BC như vậy BA, EM, CD là ba đường cao của tam giác CMB nên BA, EM, CD đồng quy.

4. Theo trên Ta có $\overset{\frown}{SM} = \overset{\frown}{EM}$ => $\angle D_1 = \angle D_2$ => DM là tia phân giác của góc ADE.(1)

5. Ta có $\angle MEC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) => $\angle MEB = 90^0$.

Tứ giác AMEB có $\angle MAB = 90^0$; $\angle MEB = 90^0$ => $\angle MAB + \angle MEB = 180^0$ mà đây là hai góc đối nên tứ giác AMEB nội tiếp một đường tròn => $\angle A_2 = \angle B_2$.

Tứ giác ABCD là tứ giác nội tiếp => $\angle A_1 = \angle B_2$(nội tiếp cùng chắn cung CD)

=> $\angle A_1 = \angle A_2$ => AM là tia phân giác của góc DAE (2)

Từ (1) và (2) Ta có M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE

<u>TH2</u> ***(Hình b)***

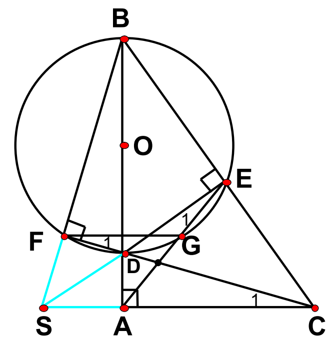
Câu 2 : $\angle ABC = \angle CME$ (cùng phụ $\angle ACB$); $\angle ABC = \angle CDS$ (cùng **<u>bù</u>** $\angle ADC$) => $\angle CME = \angle CDS$

=> $\overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{CS}$ => $\overset{\frown}{SM} = \overset{\frown}{EM}$ => ∠SCM = ∠ECM => CA là tia phân giác của góc SCB.

Bài 16 Cho tam giác ABC vuông ở A.và một điểm D nằm giữa A và B. Đường tròn đường kính BD cắt BC tại E. Các đường thẳng CD, AE lần lượt cắt đường tròn tại F, G.

Chứng minh :

1. Tam giác ABC đồng dạng với tam giác EBD.
2. Tứ giác ADEC và AFBC nội tiếp .
3. AC // FG.
4. Các đường thẳng AC, DE, FB đồng quy.



Lời giải:

1. Xét hai tam giác ABC và EDB Ta có ∠BAC = 90^0 (vì tam giác ABC vuông tại A); ∠DEB = 90^0 (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
=> ∠DEB = ∠BAC = 90^0 ; lại có ∠ABC là góc chung => ΔDEB ~ Δ CAB .

2. Theo trên ∠DEB = 90^0 => ∠DEC = 90^0 (vì hai góc kề bù); ∠BAC = 90^0 (vì ΔABC vuông tại A) hay ∠DAC = 90^0 => ∠DEC + ∠DAC = 180^0 mà đây là hai góc đối nên ADEC là tứ giác nội tiếp .

* ∠BAC = 90^0 (vì tam giác ABC vuông tại A); ∠DFB = 90^0 (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay ∠BFC = 90^0 như vậy F và A cùng nhìn BC dưới một góc bằng 90^0 nên A và F cùng nằm trên đường tròn đường kính BC => AFBC là tứ giác nội tiếp.

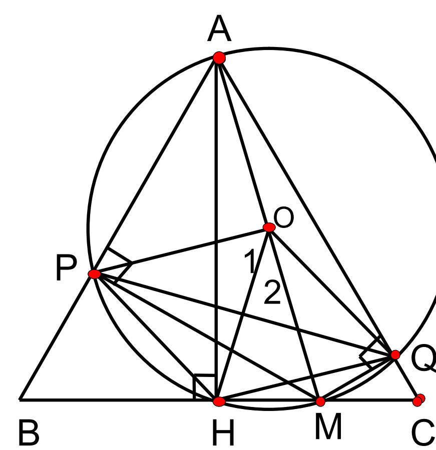
3. Theo trên ADEC là tứ giác nội tiếp => $\angle E_1 = \angle C_1$ lại có $\angle E_1 = \angle F_1$ => $\angle F_1 = \angle C_1$ mà đây là hai góc so le trong nên suy ra AC // FG.

4. (HD) Dễ thấy CA, DE, BF là ba đường cao của tam giác DBC nên CA, DE, BF đồng quy tại S.

Bài 17. Cho tam giác đều ABC có đường cao là AH. Trên cạnh BC lấy điểm M bất kì (M không trùng B. C, H) ; từ M kẻ MP, MQ vuông góc với các cạnh AB. AC.

1. Chứng minh APMQ là tứ giác nội tiếp và hãy xác định tâm O của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó.
2. Chứng minh rằng MP + MQ = AH.
3. Chứng minh OH ⊥ PQ.

Lời giải:



1. Ta có MP ⊥ AB (gt) => ∠APM = 90^0; MQ ⊥ AC (gt)
=> ∠AQM = 90^0 như vậy P và Q cùng nhìn BC dưới một góc bằng 90^0 nên P và Q cùng nằm trên đường tròn đường kính AM => APMQ là tứ giác nội tiếp.

* Vì AM là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác APMQ tâm O của đường tròn ngoại tiếp tứ giác APMQ là trung điểm của AM.

2. Tam giác ABC có AH là đường cao => $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AH$.

Tam giác ABM có MP là đường cao => $S_{ABM} = \frac{1}{2}AB.MP$

Tam giác ACM có MQ là đường cao => $S_{ACM} = \frac{1}{2}AC.MQ$

Ta có $S_{ABM} + S_{ACM} = S_{ABC}$ => $\frac{1}{2}AB.MP + \frac{1}{2}AC.MQ = \frac{1}{2}BC.AH$ => AB.MP + AC.MQ = BC.AH

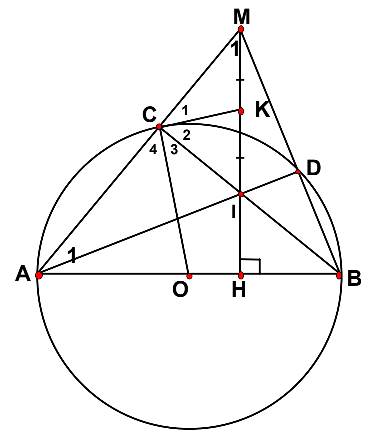
Mà AB = BC = CA (vì tam giác ABC đều) => MP + MQ = AH.

3. Tam giác ABC có AH là đường cao nên cũng là đường phân giác => $\angle HAP = \angle HAQ$ => $\overset{\frown}{HP} = \overset{\frown}{HQ}$ (tính chất góc nội tiếp) => $\angle HOP = \angle HOQ$ (t/c góc ở tâm) => OH là tia phân giác góc POQ. Mà tam giác POQ cân tại O (vì OP và OQ cùng là bán kính) nên suy ra OH cũng là đường cao => $OH \perp PQ$

<u>Bài 18</u> Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên đoạn thẳng OB lấy điểm H bất kì (H không trùng O, B) ; trên đường thẳng vuông góc với OB tại H, lấy một điểm M ở ngoài đường tròn ; MA và MB thứ tự cắt đường tròn (O) tại C và D. Gọi I là giao điểm của AD và BC.

1. Chứng minh MCID là tứ giác nội tiếp .
2. Chứng minh các đường thẳng AD, BC, MH đồng quy tại I.
3. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác MCID, Chứng minh KCOH là tứ giác nội tiếp .

<u>Lời giải:</u>



1. Ta có : $\angle ACB = 90^0$ (nội tiếp chắn nửc đường tròn)
=> $\angle MCI = 90^0$ (vì là hai góc kề bù).
$\angle ADB = 90^0$ (nội tiếp chắn nửc đường tròn)
=> $\angle MDI = 90^0$ (vì là hai góc kề bù).
=> $\angle MCI + \angle MDI = 180^0$ mà đây là hai góc đối của tứ giác MCID nên MCID là tứ giác nội tiếp.

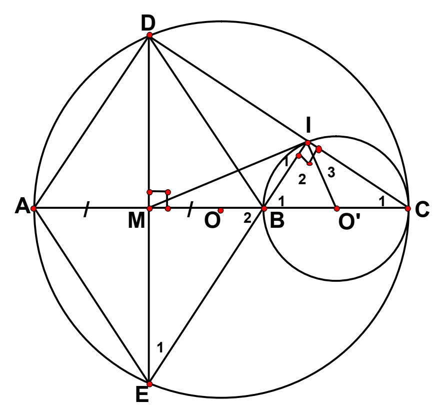
2. Theo trên Ta có $BC \perp MA$; $AD \perp MB$ nên BC và AD là hai đường cao của tam giác MAB mà BC và AD cắt nhau tại I nên I là trực tâm của tam giác MAB. Theo giả thiết thì $MH \perp AB$ nên MH cũng là đường cao của tam giác MAB => AD, BC, MH đồng quy tại I.

3. ΔOAC cân tại O (vì OA và OC là bán kính) => $\angle A_1 = \angle C_4$
ΔKCM cân tại K (vì KC và KM là bán kính) => $\angle M_1 = \angle C_1$.
Mà $\angle A_1 + \angle M_1 = 90^0$ (do tam giác AHM vuông tại H) => $\angle C_1 + \angle C_4 = 90^0$ => $\angle C_3 + \angle C_2 = 90^0$ (vì góc ACM là góc bẹt) hay $\angle OCK = 90^0$.
Xét tứ giác KCOH Ta có $\angle OHK = 90^0$; $\angle OCK = 90^0$ => $\angle OHK + \angle OCK = 180^0$ mà $\angle OHK$ và $\angle OCK$ là hai góc đối nên KCOH là tứ giác nội tiếp.

<u>Bài 19.</u> Cho đường tròn (O) đường kính AC. Trên bán kính OC lấy điểm B tuỳ ý (B khác O, C). Gọi M là trung điểm của đoạn AB. Qua M kẻ dây cung DE vuông góc với AB. Nối CD, Kẻ BI vuông góc với CD.

1. Chứng minh tứ giác BMDI nội tiếp .
2. Chứng minh tứ giác ADBE là hình thoi.
3. Chứng minh BI // AD.
4. Chứng minh I, B, E thẳng hàng.
5. Chứng minh MI là tiếp tuyến của (O').

<u>Lời giải:</u>



1. $\angle BIC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => $\angle BID = 90^0$ (vì là hai góc kề bù); $DE \perp AB$ tại M => $\angle BMD = 90^0$
=> $\angle BID + \angle BMD = 180^0$ mà đây là hai góc đối của tứ giác MBID nên MBID là tứ giác nội tiếp.

2. Theo giả thiết M là trung điểm của AB; $DE \perp AB$ tại M nên M cũng là trung điểm của DE (quan hệ đường kính và dây cung)
=> Tứ giác ADBE là hình thoi vì có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường .

3. $\angle ADC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => $AD \perp DC$; theo trên $BI \perp DC$ => BI // AD. (1)

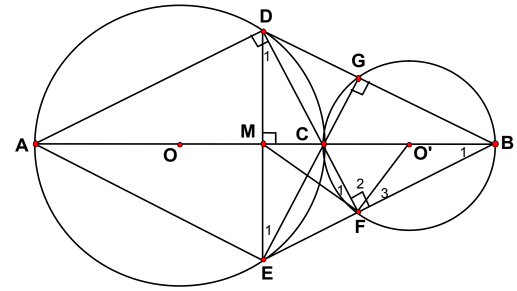
4. Theo giả thiết ADBE là hình thoi => EB // AD (2).
Từ (1) và (2) => I, B, E thẳng hàng (vì qua B chỉ có một đường thẳng song song với AD mà thôi.)

5. I, B, E thẳng hàng nên tam giác IDE vuông tại I => IM là trung tuyến (vì M là trung điểm của DE) =>MI = ME => ΔMIE cân tại M => $\angle I_1 = \angle E_1$; $\Delta O'IC$ cân tại O' (vì O'C và O'I cùng là bán kính)

=> $\angle I_3 = \angle C_1$ mà $\angle C_1 = \angle E_1$ (Cùng phụ với góc EDC) => $\angle I_1 = \angle I_3$ => $\angle I_1 + \angle I_2 = \angle I_3 + \angle I_2$. Mà $\angle I_3 + \angle I_2 = \angle BIC = 90^0$ => $\angle I_1 + \angle I_2 = 90^0 = \angle MIO'$ hay MI $\perp$ O'I tại I => MI là tiếp tuyến của (O').

Bài 20. Cho đường tròn (O; R) và (O'; R') có R > R' tiếp xúc ngoài nhau tại C. Gọi AC và BC là hai đường kính đi qua điểm C của (O) và (O'). DE là dây cung của (O) vuông góc với AB tại trung điểm M của AB. Gọi giao điểm thứ hai của DC với (O') là F, BD cắt (O') tại G. Chứng minh rằng:

1. Tứ giác MDGC nội tiếp .
2. Bốn điểm M, D, B, F cùng nằm trên một đường tròn
3. Tứ giác ADBE là hình thoi.
4. B, E, F thẳng hàng
5. DF, EG, AB đồng quy.
6. MF = 1/2 DE.
7. MF là tiếp tuyến của (O').



Lời giải:

1. $\angle BGC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)
=> $\angle CGD = 90^0$ (vì là hai góc kề bù)
Theo giả thiết DE $\perp$ AB tại M => $\angle CMD = 90^0$
=> $\angle CGD + \angle CMD = 180^0$ mà đây là hai góc đối của tứ giác MCGD nên MCGD là tứ giác nội tiếp

2. $\angle BFC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => $\angle BFD = 90^0$; $\angle BMD = 90^0$ (vì DE $\perp$ AB tại M) như vậy F và M cùng nhìn BD dưới một góc bằng 90^0 nên F và M cùng nằm trên đường tròn đường kính BD => M, D, B, F cùng nằm trên một đường tròn .

3. Theo giả thiết M là trung điểm của AB; DE $\perp$ AB tại M nên M cũng là trung điểm của DE (quan hệ đường kính và dây cung)
=> Tứ giác ADBE là hình thoi vì có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường .

4. $\angle ADC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => AD $\perp$ DF ; theo trên tứ giác ADBE là hình thoi
=> BE // AD mà AD $\perp$ DF nên suy ra BE $\perp$ DF .
Theo trên $\angle BFC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => BF $\perp$ DF mà qua B chỉ có một đường thẳng vuông góc với DF do đo B, E, F thẳng hàng.

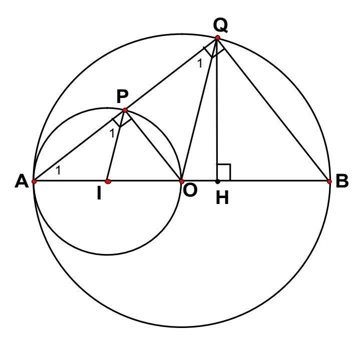
5. Theo trên DF $\perp$ BE; BM $\perp$ DE mà DF và BM cắt nhau tại C nên C là trực tâm của tam giác BDE
=> EC cũng là đường cao => EC$\perp$BD; theo trên CG$\perp$BD => E,C,G thẳng hàng. Vậy DF, EG, AB đồng quy

6. Theo trên DF $\perp$ BE => ΔDEF vuông tại F có FM là trung tuyến (vì M là trung điểm của DE) suy ra MF = 1/2 DE (vì trong tam giác vuông trung tuyến thuộc cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền).

7. (HD) theo trên MF = 1/2 DE => MD = MF => ΔMDF cân tại M => $\angle D_1 = \angle F_1$
ΔO'BF cân tại O' (vì O'B và O'F cùng là bán kính) => $\angle F_3 = \angle B_1$ mà $\angle B_1 = \angle D_1$ (Cùng phụ với $\angle DEB$)
=> $\angle F_1 = \angle F_3$ => $\angle F_1 + \angle F_2 = \angle F_3 + \angle F_2$. Mà $\angle F_3 + \angle F_2 = \angle BFC = 90^0$ => $\angle F_1 + \angle F_2 = 90^0 = \angle MFO'$ hay MF $\perp$ O'F tại F => MF là tiếp tuyến của (O').

Bài 21. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Gọi I là trung điểm của OA . Vẽ đường tron tâm I đi qua A, trên (I) lấy P bất kì, AP cắt (O) tại Q.

1. Chứng minh rằng các đường tròn (I) và (O) tiếp xúc nhau tại A.
2. Chứng minh IP // OQ.
3. Chứng minh rằng AP = PQ.
4. Xác định vị trí của P để tam giác AQB có diện tích lớn nhất.



Lời giải:

1. Ta có OI = OA — IA mà OA và IA lần lượt là các bán kính của đ/ tròn (O) và đường tròn (I) . Vậy đ/ tròn (O) và đường tròn (I) tiếp xúc nhau tại A .

2. ΔOAQ cân tại O (vì OA và OQ cùng là bán kính) => $\angle A_1 = \angle Q_1$
ΔIAP cân tại I (vì IA và IP cùng là bán kính) => $\angle A_1 = \angle P_1$
=> $\angle P_1 = \angle Q_1$ mà đây là hai góc đồng vị nên suy ra IP // OQ.

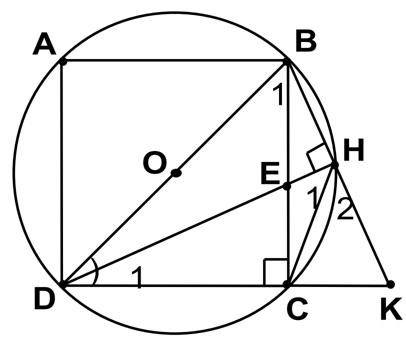
3. $\angle APO = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => $OP \perp AQ$ => OP là đường cao của ΔOAQ mà ΔOAQ cân tại O nên OP là đường trung tuyến => AP = PQ.

4. (***HD***) Kẻ $QH \perp AB$ ta có $S_{AQB} = \frac{1}{2}AB.QH$. mà AB là đường kính không đổi nên S_{AQB} lớn nhất khi QH lớn nhất. QH lớn nhất khi Q trùng với trung điểm của cung AB. Để Q trùng với trung điểm của cung AB thì P phải là trung điểm của cung AO.

Thật vậy P là trung điểm của cung AO => $PI \perp AO$ mà theo trên PI // QO => $QO \perp AB$ tại O => Q là trung điểm của cung AB và khi đó H trung với O; OQ lớn nhất nên QH lớn nhất.

Bài 22. Cho hình vuông ABCD, điểm E thuộc cạnh BC. Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với DE, đường thẳng này cắt các đường thẳng DE và DC theo thứ tự ở H và K.

1. Chứng minh BHCD là tứ giác nội tiếp .
2. Tính góc CHK.
3. Chứng minh KC. KD = KH.KB
4. Khi E di chuyển trên cạnh BC thì H di chuyển trên đường nào?



Lời giải:

1. Theo giả thiết ABCD là hình vuông nên $\angle BCD = 90^0$; $BH \perp DE$ tại H nên $\angle BHD = 90^0$ => như vậy H và C cùng nhìn BD dưới một góc bằng 90^0 nên H và C cùng nằm trên đường tròn đường kính BD => BHCD là tứ giác nội tiếp.

2. BHCD là tứ giác nội tiếp => $\angle BDC + \angle BHC = 180^0$. (1)

$\angle BHK$ là góc bẹt nên $\angle KHC + \angle BHC = 180^0$ (2).

Từ (1) và (2) => $\angle CHK = \angle BDC$ mà $\angle BDC = 45^0$ (vì ABCD là hình vuông) => $\angle CHK = 45^0$.

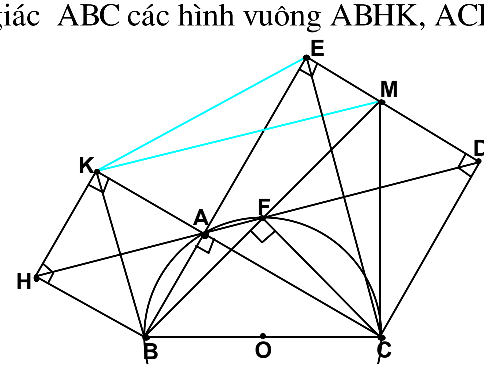
3. Xét ΔKHC và ΔKDB ta có $\angle CHK = \angle BDC = 45^0$; $\angle K$ là góc chung

=> $\Delta KHC \sim \Delta KDB$ => $\frac{KC}{KB} = \frac{KH}{KD}$ => KC. KD = KH.KB.

4. (*HD*) Ta luôn có $\angle BHD = 90^0$ và BD cố định nên khi E chuyển động trên cạnh BC cố định thì H chuyển động trên cung BC ($E \equiv B$ thì $H \equiv B$; $E \equiv C$ thì $H \equiv C$).

Bài 23. Cho tam giác ABC vuông ở A. Dựng ở miền ngoài tam giác ABC các hình vuông ABHK, ACDE.

1. Chứng minh ba điểm H, A, D thẳng hàng.
2. Đường thẳng HD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại F, chứng minh FBC là tam giác vuông cân.
3. Cho biết $\angle ABC > 45^0$; gọi M là giao điểm của BF và ED, Chứng minh 5 điểm B, K, E, M, C cùng nằm trên một đường tròn.
4. Chứng minh MC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



Lời giải:

1. Theo giả thiết ABHK là hình vuông => $\angle BAH = 45^0$

Tứ giác AEDC là hình vuông => $\angle CAD = 45^0$; tam giác ABC vuông ở A => $\angle BAC = 90^0$

=> $\angle BAH + \angle BAC + \angle CAD = 45^0 + 90^0 + 45^0 = 180^0$ => ba điểm H, A, D thẳng hàng.

2. Ta có $\angle BFC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên tam giác BFC vuông tại F. (1).

$\angle FBC = \angle FAC$ (nội tiếp cùng chắn cung FC) mà theo trên $\angle CAD = 45^0$ hay $\angle FAC = 45^0$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra ΔFBC là tam giác vuông cân tại F.

3. Theo trên $\angle BFC = 90^0$ => $\angle CFM = 90^0$ (vì là hai góc kề bù); $\angle CDM = 90^0$ (t/c hình vuông).

=> $\angle CFM + \angle CDM = 180^0$ mà đây là hai góc đối nên tứ giác CDMF nội tiếp một đường tròn suy ra $\angle CDF = \angle CMF$, mà $\angle CDF = 45^0$ (vì AEDC là hình vuông) => $\angle CMF = 45^0$ hay $\angle CMB = 45^0$.

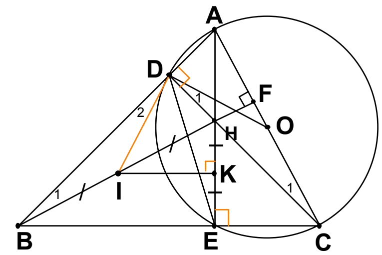
Ta cũng có $\angle CEB = 45^0$ (vì AEDC là hình vuông); $\angle BKC = 45^0$ (vì ABHK là hình vuông).

Như vậy K, E, M cùng nhìn BC dưới một góc bằng 45^0 nên cùng nằm trên cung chứa góc 45^0 dựng trên BC => 5 điểm B, K, E, M, C cùng nằm trên một đường tròn.

4. ΔCBM có $\angle B = 45^0$; $\angle M = 45^0$ => $\angle BCM = 45^0$ hay $MC \perp BC$ tại C => MC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 24. Cho tam giác nhọn ABC có $\angle B = 45^0$. Vẽ đường tròn đường kính AC có tâm O, đường tròn này cắt BA và BC tại D và E.

1. Chứng minh AE = EB.
2. Gọi H là giao điểm của CD và AE, Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn HE đi qua trung điểm I của BH.
3. Chứng minh OD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp Δ BDE.



Lời giải:

1. $\angle AEC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> $\angle AEB = 90^0$ (vì là hai góc kề bù); Theo giả thiết $\angle ABE = 45^0$

=> ΔAEB là tam giác vuông cân tại E => EA = EB.

2. Gọi K là trung điểm của HE (1) ; I là trung điểm của HB => IK là đường trung bình của tam giác HBE => IK // BE mà $\angle AEC = 90^0$ nên $BE \perp HE$ tại E => $IK \perp HE$ tại K (2).

Từ (1) và (2) => IK là trung trực của HE . Vậy trung trực của đoạn HE đi qua trung điểm I của BH.

3. theo trên I thuộc trung trực của HE => IE = IH mà I là trung điểm của BH => IE = IB.

$\angle ADC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => $\angle BDH = 90^0$ (kề bù $\angle ADC$) => tam giác BDH vuông tại D có DI là trung tuyến (do I là trung điểm của BH) => ID = 1/2 BH hay ID = IB => IE = IB = ID => I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE bán kính ID.

Ta có ΔODC cân tại O (vì OD và OC là bán kính) => $\angle D_1 = \angle C_1$. (3)

ΔIBD cân tại I (vì ID và IB là bán kính) => $\angle D_2 = \angle B_1$. (4)

Theo trên ta có CD và AE là hai đường cao của tam giác ABC => H là trực tâm của tam giác ABC => BH cũng là đường cao của tam giác ABC => $BH \perp AC$ tại F => ΔAEB có $\angle AFB = 90^0$.

Theo trên ΔADC có $\angle ADC = 90^0$ => $\angle B_1 = \angle C_1$ (cùng phụ $\angle BAC$) (5).

Từ (3), (4), (5) =>$\angle D_1 = \angle D_2$ mà $\angle D_2 + \angle IDH = \angle BDC = 90^0$=> $\angle D_1 + \angle IDH = 90^0 = \angle IDO$ => $OD \perp ID$ tại D => OD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE.

Bài 25. Cho đường tròn (O), BC là dây bất kì (BC< 2R). Kẻ các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và C chúng cắt nhau tại A. Trên cung nhỏ BC lấy một điểm M rồi kẻ các đường vuông góc MI, MH, MK xuống các cạnh tương ứng BC, AC, AB. Gọi giao điểm của BM, IK là P; giao điểm của CM, IH là Q.

1. Chứng minh tam giác ABC cân. **2**. Các tứ giác BIMK, CIMH nội tiếp .

3. Chứng minh $MI^2 = MH.MK$. **4**. Chứng minh $PQ \perp MI$.

Lời giải:

1. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có AB = AC => ΔABC cân tại A.

2. Theo giả thiết $MI \perp BC$ => $\angle MIB = 90^0$; $MK \perp AB$ => $\angle MKB = 90^0$.

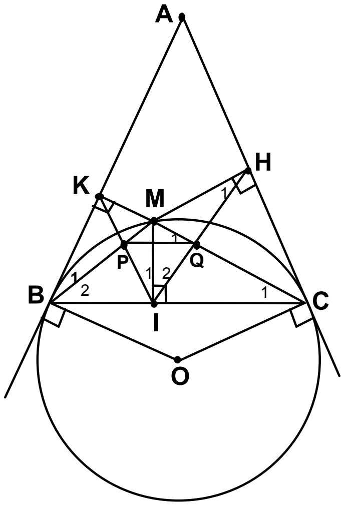
=> $\angle MIB + \angle MKB = 180^0$ mà đây là hai góc đối => tứ giác BIMK nội tiếp

*** *(Chứng minh tứ giác CIMH nội tiếp tương tự tứ giác BIMK)***

3. Theo trên tứ giác BIMK nội tiếp => $\angle KMI + \angle KBI = 180^0$; tứ giác CHMI nội tiếp => $\angle HMI + \angle HCI = 180^0$. mà $\angle KBI = \angle HCI$ (vì tam giác ABC cân tại A) => $\angle KMI = \angle HMI$ (1).

Theo trên tứ giác BIMK nội tiếp => $\angle B_1 = \angle I_1$ (nội tiếp cùng chắn cung KM); tứ giác CHMI nội tiếp => $\angle H_1 = \angle C_1$ (nội tiếp cùng chắn cung IM). Mà $\angle B_1 = \angle C_1$ (= 1/2 sđ $\overset{\frown}{BM}$) => $\angle I_1 = \angle H_1$ (2).

Từ (1) và (2) => ΔMKI ΔMIH => $\frac{MI}{MH} = \frac{MK}{MI}$ => $MI^2 = MH.MK$

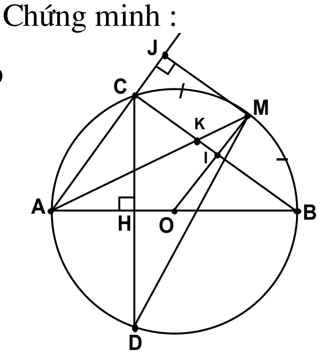


4. Theo trên ta có $\angle I_1 = \angle C_1$; cũng chứng minh tương tự ta có $\angle I_2 = \angle B_2$ mà $\angle C_1 + \angle B_2 + \angle BMC = 180^0$ => $\angle I_1 + \angle I_2 + \angle BMC = 180^0$ hay $\angle PIQ + \angle PMQ = 180^0$ mà đây là hai góc đối => tứ giác PMQI nội tiếp => $\angle Q_1 = \angle I_1$ mà $\angle I_1 = \angle C_1$ => $\angle Q_1 = \angle C_1$ => PQ // BC (vì có hai góc đồng vị bằng nhau) . Theo giả thiết MI $\perp$BC nên suy ra IM $\perp$ PQ.

<u>Bài 26.</u> Cho đường tròn (O), đường kính AB = 2R. Vẽ dây cung CD $\perp$ AB ở H. Gọi M là điểm chính giữa của cung CB, I là giao điểm của CB và OM. K là giao điểm của AM và CB. Chứng minh :

1. $\frac{KC}{KB} = \frac{AC}{AB}$ **2**. AM là tia phân giác của $\angle$CMD. **3**. Tứ giác OHCI nội tiếp

4. Chứng minh đường vuông góc kẻ từ M đến AC cũng là tiếp tuyến của đường tròn tại M.



<u>Lời giải:</u> **1**. Theo giả thiết M là trung điểm của $\overset{\frown}{BC}$ => $\overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{MC}$ => $\angle$CAM = $\angle$BAM (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) => AK là tia phân giác của góc CAB => $\frac{KC}{KB} = \frac{AC}{AB}$ (t/c tia phân giác của tam giác)

2. (***HD***) Theo giả thiết CD $\perp$ AB => A là trung điểm của $\overset{\frown}{CD}$ => $\angle$CMA = $\angle$DMA => MA là tia phân giác của góc CMD.

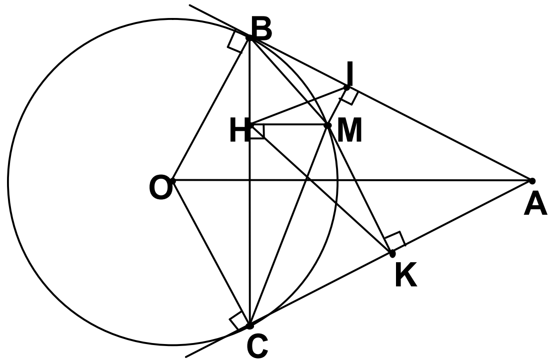
3. (***HD***) Theo giả thiết M là trung điểm của $\overset{\frown}{BC}$ => OM $\perp$ BC tại I => $\angle OIC = 90^0$; CD $\perp$ AB tại H => $\angle OHC = 90^0$ => $\angle OIC + \angle OHC = 180^0$ mà đây là hai góc đối => tứ giác OHCI nội tiếp

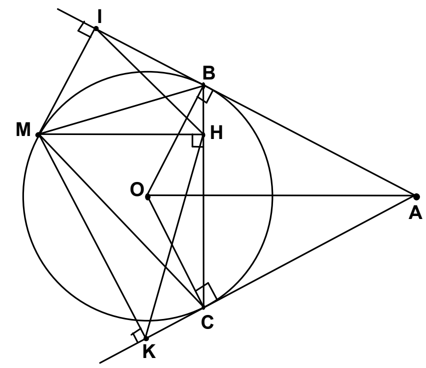
4. Kẻ MJ $\perp$ AC ta có MJ // BC (vì cùng vuông góc với AC). Theo trên OM $\perp$ BC => OM $\perp$ MJ tại J suy ra MJ là tiếp tuyến của đường tròn tại M.

<u>Bài 27</u> Cho đường tròn (O) và một điểm A ở ngoài đường tròn . Các tiếp tuyến với đường tròn (O) kẻ từ A tiếp xúc với đường tròn (O) tại B và C. Gọi M là điểm tuỳ ý trên đường tròn (M khác B, C), từ M kẻ MH $\perp$ BC, MK $\perp$ CA, MI $\perp$ AB. Chứng minh :

1. Tứ giác ABOC nội tiếp. **2**. $\angle$BAO = $\angle$ BCO. **3**. ΔMIH ~ ΔMHK. **4**. MI.MK = MH^2.

<u>Lời giải:</u>





1. (*HS tự giải*)
2. Tứ giác ABOC nội tiếp => ∠BAO = ∠ BCO (nội tiếp cùng chắn cung BO).
3. Theo giả thiết MH ⊥ BC => ∠MHC = 90^0; MK ⊥ CA => ∠MKC = 90^0

=> ∠MHC + ∠MKC = 180^0 mà đây là hai góc đối => tứ giác MHCK nội tiếp => ∠HCM = ∠HKM (nội tiếp cùng chắn cung HM).

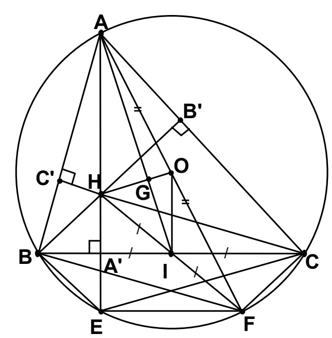
Chứng minh tương tự ta có tứ giác MHBI nội tiếp => ∠MHI = ∠MBI (nội tiếp cùng chắn cung IM).

Mà ∠HCM = ∠MBI (= 1/2 sđ $\overset{\frown}{BM}$) => ∠HKM = ∠MHI (1). Chứng minh tương tự ta cũng có ∠KHM = ∠HIM (2). Từ (1) và (2) => Δ HIM ~ Δ KHM.

4. Theo trên Δ HIM ~ Δ KHM => $\frac{MI}{MH} = \frac{MH}{MK}$ => MI.MK = MH^2

Bài 28 Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC; E là điểm đối xứng của H qua BC; F là điểm đối xứng của H qua trung điểm I của BC.

1. Chứng minh tứ giác BHCF là hình bình hành.
2. E, F nằm trên đường tròn (O).
3. Chứng minh tứ giác BCFE là hình thang cân.
4. Gọi G là giao điểm của AI và OH. Chứng minh G là trọng tâm của tam giác ABC.



Lời giải:

1. Theo giả thiết F là điểm đối xứng của H qua trung điểm I của BC => I là trung điểm BC và HE => BHCF là hình bình hành vì có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường .

2. (***HD***) Tứ giác AB'HC' nội tiếp => ∠BAC + ∠B'HC' = 180^0 mà ∠BHC = ∠B'HC' (đối đỉnh) => ∠BAC + ∠BHC = 180^0. Theo trên BHCF là hình bình hành => ∠BHC = ∠BFC => ∠BFC + ∠BAC = 180^0

=> Tứ giác ABFC nội tiếp => F thuộc (O).

* H và E đối xứng nhau qua BC => ΔBHC = ΔBEC (c.c.c) => ∠BHC = ∠BEC => ∠ BEC + ∠BAC = 180^0 => ABEC nội tiếp => E thuộc (O) .

3. Ta có H và E đối xứng nhau qua BC => BC ⊥ HE (1) và IH = IE mà I là trung điểm của của HF => EI = 1/2 HE => tam giác HEF vuông tại E hay FE ⊥ HE (2)

Từ (1) và (2) => EF // BC => BEFC là hình thang. (3)

Theo trên E ∈(O) => ∠CBE = ∠CAE (nội tiếp cùng chắn cung CE) (4).

Theo trên F ∈(O) và ∠FEA =90^0 => AF là đường kính của (O) => ∠ACF = 90^0 => ∠BCF = ∠CAE (vì cùng phụ ∠ACB) (5).

Từ (4) và (5) => ∠BCF = ∠CBE (6).

Từ (3) và (6) => tứ giác BEFC là hình thang cân.

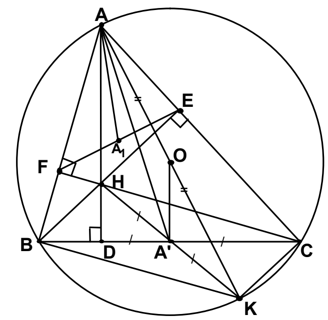
4. Theo trên AF là đường kính của (O) => O là trung điểm của AF; BHCF là hình bình hành => I là trung điểm của HF => OI là đường trung bình của tam giác AHF => OI = 1/ 2 AH.

Theo giả thiết I là trung điểm của BC => OI ⊥ BC (Quan hệ đường kính và dây cung) => ∠OIG = ∠HAG (vì so le trong); lại có ∠OGI = ∠ HGA (đối đỉnh) => ΔOGI ~ ΔHGA => $\frac{GI}{GA}=\frac{OI}{HA}$ mà OI = $\frac{1}{2}$ AH

=> $\frac{GI}{GA}=\frac{1}{2}$ mà AI là trung tuyến của Δ ABC (do I là trung điểm của BC) => G là trọng tâm của Δ ABC.

Bài 29 BC là một dây cung của đường tròn (O; R) (BC ≠ 2R). Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho O luôn nằm trong tam giác ABC. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại H.

1. Chứng minh tam giác AEF đồng dạng với tam giác ABC.
2. Gọi A' là trung điểm của BC, Chứng minh AH = 2OA'.
3. Gọi A_1 là trung điểm của EF, Chứng minh R.AA_1 = AA'. OA'.
4. Chứng minh R(EF + FD + DE) = $2S_{ABC}$ suy ra vị trí của A để tổng EF + FD + DE đạt giá trị lớn nhất.



Lời giải: ***(HD)***

1. Tứ giác BFEC nội tiếp => ∠AEF = ∠ACB (cùng bù ∠BFE)
∠AEF = ∠ABC (cùng bù ∠CEF) => Δ AEF ~ Δ ABC.

2. Vẽ đường kính AK => KB // CH (cùng vuông góc AB); KC // BH (cùng vuông góc AC) => BHKC là hình bình hành => A' là trung điểm của HK => OK là đường trung bình của ΔAHK => AH = 2OA'

3. Áp dụng tính chất : *nếu hai tam giác đồng dạng thì tỉ số giữa hia trung tuyến, tỉ số giữa hai bán kính các đường tròn ngoại tiếp bằng tỉ số đồng dạng*. ta có :

Δ AEF ~ Δ ABC => $\frac{R}{R'}=\frac{AA'}{AA_1}$ (1) trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC; R' là bán kính đường tròn ngoại tiếp Δ AEF; AA' là trung tuyến của ΔABC; AA_1 là trung tuyến của ΔAEF.

Tứ giác AEHF nội tiếp đường tròn đường kính AH nên đây cũng là đường tròn ngoại tiếp ΔAEF

Từ (1) => R.AA_1 = AA'. R' = AA' $\frac{AH}{2}$ = AA' . $\frac{2A'O}{2}$

Vậy R . AA_1 = AA' . A'O (2)

4. Gọi B', C'lần lượt là trung điểm của AC, AB, ta có OB'⊥AC ; OC'⊥AB (bán kính đi qua trung điểm của một dây không qua tâm) => OA', OB', OC' lần lượt là các đường cao của các tam giác OBC, OCA, OAB.

$S_{ABC} = S_{OBC} + S_{OCA} + S_{OAB} = \frac{1}{2}$ (OA' . BC' + OB' . AC + OC' . AB)

$2S_{ABC}$ = OA' . BC + OB' . AC' + OC' . AB (3)

Theo (2) => OA' = R . $\frac{AA_1}{AA'}$ mà $\frac{AA_1}{AA'}$ là tỉ số giữa 2 trung tuyến của hai tam giác đồng dạng AEF và ABC

nên $\frac{AA_1}{AA'} = \frac{EF}{BC}$. Tương tự ta có : OB' = R .$\frac{FD}{AC}$; OC' = R . $\frac{ED}{AB}$ Thay vào (3) ta được

$2S_{ABC} = R\,(\frac{EF}{BC}.BC+\frac{FD}{AC}.AC+\frac{ED}{AB}.AB)$ ⇔ $2S_{ABC}$ = R(EF + FD + DE)

* R(EF + FD + DE) = $2S_{ABC}$ mà R không đổi nên (EF + FD + DE) đạt gí trị lớn nhất khi S_{ABC}.

Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}$ AD.BC do BC không đổi nên S_{ABC} lớn nhất khi AD lớn nhất, mà AD lớn nhất khi A là điểm chính giữa của cung lớn BC.

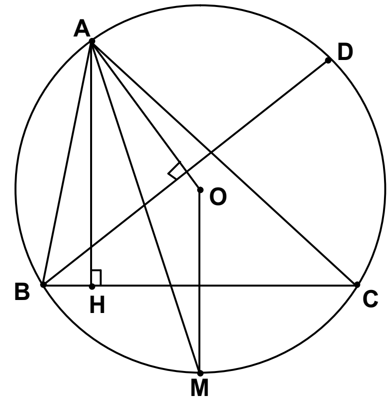
Bài 30 Cho tam giác ABC nội tiếp (O; R), tia phân giác của góc BAC cắt (O) tại M. Vẽ đường cao AH và bán kính OA.

1. Chứng minh AM là phân giác của góc OAH.

2. Giả sử ∠B > ∠C. Chứng minh ∠OAH = ∠B - ∠C.
3. Cho ∠BAC = 60^0 và ∠OAH = 20^0. Tính:

a) ∠B và ∠C của tam giác ABC.

b) Diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây BC và cung nhỏ BC theo R



Lời giải: ***(HD)***

1. AM là phân giác của ∠BAC => ∠BAM = ∠CAM => $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{CM}$ => M là trung điểm của cung BC => OM ⊥ BC; Theo giả thiết AH ⊥ BC => OM // AH => ∠HAM = ∠OMA (so le). Mà ∠OMA = ∠OAM (vì tam giác OAM cân tại O do có OM = OA = R) => ∠HAM = OAM => AM là tia phân giác của góc OAH.

2. Vẽ dây BD ⊥ OA => $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AD}$ => ∠ABD = ∠ACB.

Ta có ∠OAH = ∠ DBC (góc có cạnh tương ứng vuông góc cùng nhọn) => ∠OAH = ∠ABC - ∠ABD => ∠OAH = ∠ABC - ∠ACB hay ∠OAH = ∠B - ∠C.

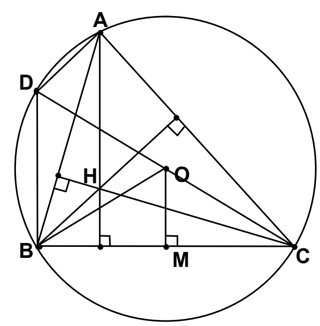
3. a) Theo giả thiết ∠BAC = 60^0 => ∠B + ∠C = 120^0 ; theo trên ∠B ∠C = ∠OAH => ∠B - ∠C = 20^0 .

$$=> \begin{cases} \angle B + \angle C = 120^0 \\ \angle B - \angle C = 20^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \angle B = 70^0 \\ \angle C = 50^0 \end{cases}$$

b) $S_{vp} = S_{qBOC} - S_{\square BOC} = \dfrac{\pi.R^2.120^2}{360^0} - \dfrac{1}{2}R.\sqrt{3}.\dfrac{R}{2} = \dfrac{\pi.R^2}{3} - \dfrac{R^2.\sqrt{3}}{4} = \dfrac{R^2.(4\pi - 3\sqrt{3})}{12}$

Bài 31 Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp (O; R), biết ∠BAC = 60^0.

1. Tính số đo góc BOC và độ dài BC theo R.
2. Vẽ đường kính CD của (O; R); gọi H là giao điểm của ba đường cao của tam giác ABC Chứng minh BD // AH và AD // BH.
3. Tính AH theo R.



Lời giải:

1. Theo giả thiết ∠BAC = 60^0 => sđ $\overset{\frown}{BC} = 120^0$ (t/c góc nội tiếp)
=> ∠BOC = 120^0 (t/c góc ở tâm) .

* Theo trên sđ $\overset{\frown}{BC} = 120^0$ => BC là cạnh của một tam giác đều nội tiếp (O; R) => BC = R $\sqrt{3}$.

2. CD là đường kính => ∠DBC = 90^0 hay DB ⊥ BC; theo giả thiết AH là đường cao => AH ⊥ BC => BD // AH. *Chứng minh tương tự ta cũng được AD // BH.*

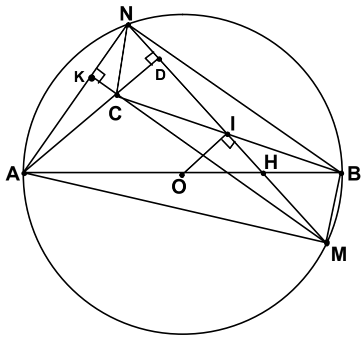
3. Theo trên ∠DBC = 90^0 => ΔDBC vuông tại B có BC = R $\sqrt{3}$; CD = 2R.
=> $BD^2 = CD^2 — BC^2$ => $BD^2 = (2R)^2 — (R\sqrt{3})^2 = 4R^2 — 3R^2 = R^2$ => BD = R.
Theo trên BD // AH; AD // BH => BDAH là hình bình hành => AH = BD => AH = R.

Bài 32 Cho đường tròn (O), đường kính AB = 2R. Một cát tuyến MN quay quanh trung điểm H của OB.

1. Chứng minh khi MN di động , trung điểm I của MN luôn nằm trên một đường tròn cố định.
2. Từ A kẻ Ax ⊥ MN, tia BI cắt Ax tại C. Chứng minh tứ giác CMBN là hình bình hành.
3. Chứng minh C là trực tâm của tam giác AMN.
4. Khi MN quay quanh H thì C di động trên đường nào.
5. Cho AM. AN = $3R^2$, AN = R $\sqrt{3}$. Tính diện tích phần hình tròn (O) nằm ngoài tam giác AMN.

Lời giải: (***HD***)

1. I là trung điểm của MN => OI ⊥ MN tại I (quan hệ đường kính và dây cung) => ∠OIH = 90^0 .



OH cố định nên khi MN di động thì I cũng di động nhưng luôn nhìn OH cố định dưới một góc 90^0 do đó I di động trên đường tròn đường kính OH. Vậy khi MN di động , trung điểm I của MN luôn nằm trên một đường tròn cố định.

2. Theo giả thiết Ax $\perp$ MN; theo trên OI $\perp$ MN tại I => OI // Ax hay OI // AC mà O là trung điểm của AB => I là trung điểm của BC, lại có I là trung điểm của MN (gt) => CMBN là hình bình hành (Vì có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường).

3. CMBN là hình bình hành => MC // BN mà BN $\perp$ AN (vì $\angle ANB = 90^0$ do là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) => MC $\perp$ AN; theo trên AC $\perp$ MN => C là trực tâm của tam giác AMN.

4. Ta có H là trung điểm của OB; I là trung điểm của BC => IH là đường tung bình của ΔOBC => IH // OC Theo giả thiết Ax $\perp$ MN hay IH $\perp$ Ax => OC $\perp$ Ax tại C => $\angle OCA = 90^0$ => C thuộc đường tròn đường kính OA cố định. Vậy khi MN quay quanh H thì C di động trên đường tròn đường kính OA cố định.

5. Ta có AM. AN = $3R^2$, AN = $R\sqrt{3}$. => AM =AN = $R\sqrt{3}$ => ΔAMN cân tại A. (1)

Xét ΔABN vuông tại N ta có AB = 2R; AN = $R\sqrt{3}$ => BN = R => $\angle ABN = 60^0$.

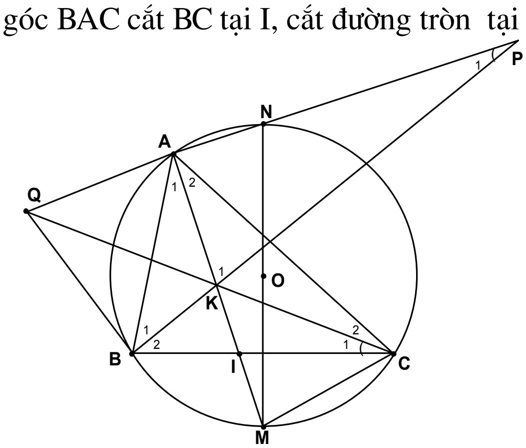
$\angle ABN = \angle AMN$ (nội tiếp cùng chắn cung AN) => $\angle AMN = 60^0$ (2).

Từ (1) và (2) => ΔAMN là tam giác đều => $S_{\Delta AMN} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

=> $S = S_{(O)} - S_{\Delta AMN} = \pi R^2 - \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{4}$

<u>Bài 33</u> Cho tam giác ABC nội tiếp (O; R), tia phân giác của góc BAC cắt BC tại I, cắt đường tròn tại M.

1. Chứng minh OM $\perp$ BC.
2. Chứng minh MC^2 = MI.MA.
3. Kẻ đường kính MN, các tia phân giác của góc B và C cắt đường thẳng AN tại P và Q. Chứng minh bốn điểm P, C , B, Q cùng thuộc một đường tròn .



<u>Lời giải:</u>

1. AM là phân giác của $\angle BAC$ => $\angle BAM = \angle CAM$ => $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{CM}$ => M là trung điểm của cung BC => OM $\perp$ BC

2. Xét ΔMCI và ΔMAC có $\angle MCI = \angle MAC$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau); $\angle M$ là góc chung

=> $\Delta MCI \sim \Delta MAC$ => $\frac{MC}{MA} = \frac{MI}{MC}$ => MC^2 = MI.MA.

3. (*HD*) $\angle$MAN = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => $\angle P_1 = 90^0 — \angle K_1$ mà $\angle K_1$ là góc ngoài của tam giác AKB nên $\angle K_1 = \angle A_1 + \angle B_1 = \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2}$ (t/c phân giác của một góc) => $\angle P_1 = 90^0$ — $(\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2})$.(1)

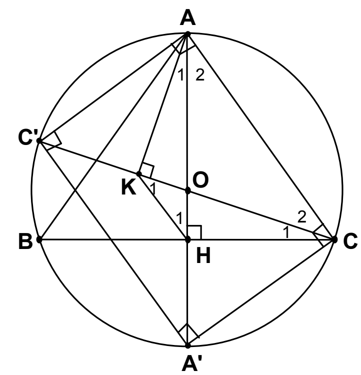
CQ là tia phân giác của góc ACB => $\angle C_1 = \frac{\angle C}{2} = \frac{1}{2}(180^0 - \angle A - \angle B) = 90^0 — (\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2})$. (2).

Từ (1) và (2) => $\angle P_1 = \angle C_1$ hay $\angle$QPB = $\angle$QCB mà P và C nằm cùng về một nửa mặt phẳng bờ BQ nên cùng nằm trên cung chứa góc $90^0 — (\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2})$ dựng trên BQ.

Vậy bốn điểm P, C, B, Q cùng thuộc một đường tròn .

Bài 34 Cho tam giác ABC cân (AB = AC), BC = 6 Cm, chiều cao AH = 4 Cm, nội tiếp đường tròn (O) đường kính AA'.

1. Tính bán kính của đường tròn (O).
2. Kẻ đường kính CC', tứ giác CAC'A' là hình gì? Tại sao?
3. Kẻ AK ⊥ CC' tứ giác AKHC là hình gì? Tại sao?
4. Tính diện tích phần hình tròn (O) nằm ngoài tam giác ABC.



Lời giải:

1. (*HD*) Vì ΔABC cân tại A nên đường kính AA' của đường tròn ngoại tiếp và đường cao AH xuất phát từ đỉnh A trùng nhau, tức là AA'đi qua H.

=> ΔACA' vuông tại C có đường cao CH = $\frac{BC}{2} = \frac{6}{2} =$ 3cm; AH = 4cm => CH^2 = AH.A'H => A'H = $\frac{CH^2}{AH} = \frac{3^2}{4} = \frac{9}{4} = 2,5$ => AA'

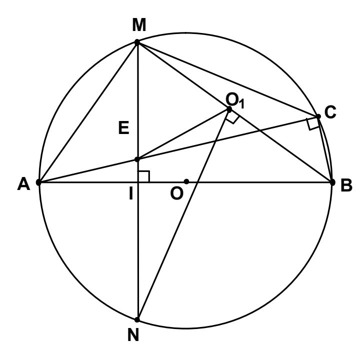
=> AA' = AH + HA' = 4 + 2,5 = 6,5 9cm) => R = AA' : 2 = 6,5 : 2 = 3,25 (cm) .

2. Vì AA' và CC' là hai đường kính nên cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường => ACA'C' là hình bình hành. Lại có $\angle$ACA' = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên suy ra tứ giác ACA'C' là hình chữ nhật.

3. Theo giả thiết AH ⊥ BC; AK ⊥ CC' => K và H cùng nhìn AC dưới một góc bằng 90^0 nên cùng nằm trên đường tròn đường kính AC hay tứ giác ACHK nội tiếp (**1**) => $\angle C_2 = \angle H_1$ (nội tiếp cung chắn cung AK) ; ΔAOC cân tại O (vì OA=OC=R) => $\angle C_2 = \angle A_2$ => $\angle A_2 = \angle H_1$ => HK // AC (vì có hai góc so le trong bằng nhau) => tứ giác ACHK là hình thang (2).Từ (1) và (2) suy ra tứ giác ACHK là hình thang cân.

Bài 35 Cho đường tròn (O), đường kính AB cố định, điểm I nằm giữa A và O sao cho AI = 2/3 AO. Kẻ dây MN vuông góc với AB tại I, gọi C là điểm tuỳ ý thuộc cung lớn MN sao cho C không trùng với M, N và B. Nối AC cắt MN tại E.

1. Chứng minh tứ giác IECB nội tiếp .
2. Chứng minh tam giác AME đồng dạng với tam giác ACM.
3. Chứng minh AM^2 = AE.AC.
4. Chứng minh AE. AC - AI.IB = AI^2 .
5. Hãy xác định vị trí của C sao cho khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME là nhỏ nhất.



Lời giải:

1. Theo giả thiết MN ⊥AB tại I => $\angle$EIB = 90^0; $\angle$ ACB nội tiếp chắn nửa đường tròn nên $\angle$ACB = 90^0 hay $\angle$ECB = 90^0

=> $\angle$EIB + $\angle$ECB = 180^0 mà đây là hai góc đối của tứ giác IECB nên tứ giác IECB là tứ giác nội tiếp .

2. Theo giả thiết MN ⊥AB => A là trung điểm của cung MN => ∠AMN = ∠ACM (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) hay ∠AME = ∠ACM. Lại thấy ∠CAM là góc chung của hai tam giác AME và AMC do đó tam giác AME đồng dạng với tam giác ACM.

3. Theo trên ΔAME ~ Δ ACM => $\frac{AM}{AC}=\frac{AE}{AM}$ => AM^2 = AE.AC

4. ∠AMB = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn); MN ⊥AB tại I => ΔAMB vuông tại M có MI là đường cao => MI^2 = AI.BI (hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông) .

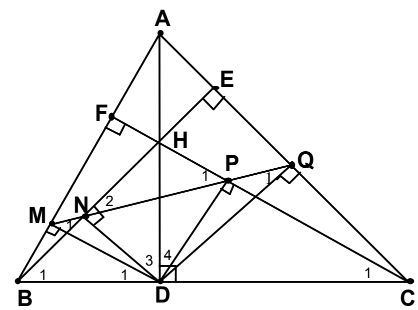
Áp dụng định lí Pitago trong tam giác AIM vuông tại I ta có AI^2 = AM^2 — MI^2 => AI^2 = AE.AC - AI.BI .

5. Theo trên ∠AMN = ∠ACM => AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp Δ ECM; Nối MB ta có ∠AMB = 90^0 , do đó tâm O$_1$ của đường tròn ngoại tiếp Δ ECM phải nằm trên BM. Ta thấy NO$_1$ nhỏ nhất khi NO$_1$ là khoảng cách từ N đến BM => NO$_1$ ⊥BM.

Gọi O$_1$ là chân đường vuông góc kẻ từ N đến BM ta được O$_1$ là tâm đường tròn ngoại tiếp Δ ECM có bán kính là O$_1$M. Do đó để khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME là nhỏ nhất thì C phải là giao điểm của đường tròn tâm O$_1$ bán kính O$_1$M với đường tròn (O) trong đó O$_1$ là hình chiếu vuông góc của N trên BM.

Bài 36 Cho tam giác nhọn ABC , Kẻ các đường cao AD, BE, CF. Gọi H là trực tâm của tam giác. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các hình chiếu vuông góc của D lên AB, BE, CF, AC. Chứng minh :

1. Các tứ giác DMFP, DNEQ là hình chữ nhật.
2. Các tứ giác BMND; DNHP; DPQC nội tiếp .
3. Hai tam giác HNP và HCB đồng dạng.
4. Bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng.



Lời giải: ***1. & 2. (HS tự làm)***

3. Theo chứng minh trên DNHP nội tiếp => ∠N$_2$ = ∠D$_4$ (nội tiếp cùng chắn cung HP); ΔHDC có ∠HDC = 90^0 (do AH là đường cao) Δ HDP có ∠HPD = 90^0 (do DP ⊥ HC) => ∠C$_1$= ∠D$_4$ (cùng phụ với ∠DHC)=>∠C$_1$=∠N$_2$ (1) chứng minh tương tự ta có ∠B$_1$=∠P$_1$ (2)

Từ (1) và (2) => ΔHNP ~ Δ HCB

4. Theo chứng minh trên DNMB nội tiếp => ∠N$_1$ = ∠D$_1$ (nội tiếp cùng chắn cung BM).(3)

DM // CF (cùng vuông góc với AB) => ∠C$_1$= ∠D$_1$ (hai góc đồng vị).(4)

Theo chứng minh trên ∠C$_1$ = ∠N$_2$ (5)

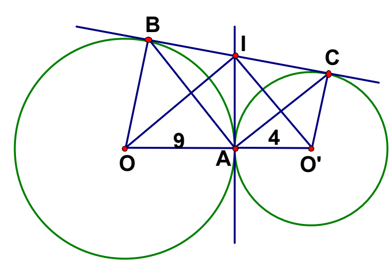
Từ (3), (4), (5) => ∠N$_1$ = ∠N$_2$ mà B, N, H thẳng hàng => M, N, P thẳng hàng. (6)

Chứng minh tương tự ta cung có N, P, Q thẳng hàng . (7)

Từ (6), (7) => Bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng

Bài 37 Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC, B ∈ (O), C ∈ (O') . Tiếp tuyến chung trong tại A cắt tiếp tuyến chung ngoài BC ở I.

1. Chứng minh các tứ giác OBIA, AICO' nội tiếp .
2. Chứng minh ∠ BAC = 90^0 .
3. Tính số đo góc OIO'.
4. Tính độ dài BC biết OA = 9cm, O'A = 4cm.



Lời giải:

1. *(HS tự làm)*
2. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có IB = IA , IA = IC

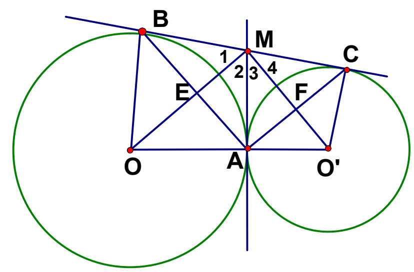
△ABC có AI = $\frac{1}{2}$ BC =>△ABC vuông tại A hay ∠BAC =90^0

3. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có IO là tia phân giác ∠BIA; I0'là tia phân giác ∠CIA . mà hai góc BIA và CIA là hai góc kề bù => I0 ⊥ I0'=> ∠0I0'= 90^0

4. Theo trên ta có △0I0' vuông tại I có IA là đường cao (do AI là tiếp tuyến chung nên AI ⊥OO')
=> IA^2 = A0.A0' = 9. 4 = 36 => IA = 6 => BC = 2. IA = 2. 6 = 12(cm)

Bài 38 Cho hai đường tròn (O) ; (O') tiếp xúc ngoài tại A, BC là tiếp tuyến chung ngoài, B∈(O), C∈ (O'). Tiếp tuyến chung trong tại A cắ tiếp tuyến chung ngoài BC ở M. Gọi E là giao điểm của OM và AB, F là giao điểm của O'M và AC. Chứng minh :

1. Chứng minh các tứ giác OBMA, AMCO' nội tiếp .
2. Tứ giác AEMF là hình chữ nhật.
3. ME.MO = MF.MO'.
4. OO' là tiếp tuyến của đường tròn đường kính BC.
5. BC là tiếp tuyến của đường tròn đường kính OO'.



Lời giải:

1. ***(HS tự làm)***

2. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có MA = MB
=>△MAB cân tại M. Lại có ME là tia phân giác => ME ⊥ AB (1).
Chứng minh tương tự ta cũng có MF ⊥ AC (2).
Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta cũng có MO và MO' là tia phân giác của hai góc kề bù BMA và CMA => MO ⊥ MO' (3).
Từ (1), (2) và (3) suy ra tứ giác MEAF là hình chữ nhật

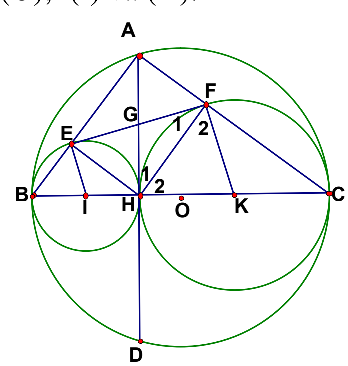
3. Theo giả thiết AM là tiếp tuyến chung của hai đường tròn => MA ⊥ OO'=> ΔMAO vuông tại A có AE ⊥ MO (theo trên ME ⊥ AB) ⇒ MA^2 = ME. MO (4)
Tương tự ta có tam giác vuông MAO' có AF⊥MO'⇒ MA^2 = MF.MO' (5)
Từ (4) và (5) ⇒ ME.MO = MF. MO'

4. Đường tròn đường kính BC có tâm là M vì theo trên MB = MC = MA, đường tròn này đi qua Avà co MA là bán kính . Theo trên OO' ⊥ MA tại A ⇒ OO' là tiếp tuyến tại A của đường tròn đường kính BC.

5. ***(HD)*** Gọi I là trung điểm của OO' ta có IM là đường trung bình của hình thang BCO'O
=> IM⊥BC tại M (*) .Ta cung chứng minh được ∠OMO' vuông nên M thuộc đường tròn đường kính OO'
=> IM là bán kính đường tròn đường kính OO' (**)
Từ (*) và (**) => BC là tiếp tuyến của đường tròn đường kính OO'

Bài 39 Cho đường tròn (O) đường kính BC, dấy AD vuông góc với BC tại H. Gọi E, F theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC. Gọi (I), (K) theo thứ tự là các đường tròn ngoại tiếp tam giác HBE, HCF.

1. Hãy xác định vị trí tương đối của các đường tròn (I) và (O); (K) và (O); (I) và (K).
2. Tứ giác AEHF là hình gì? Vì sao?.
3. Chứng minh AE. AB = AF. AC.
4. Chứng minh EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K).
5. Xác định vị trí của H để EF có độ dài lớn nhất.



Lời giải:

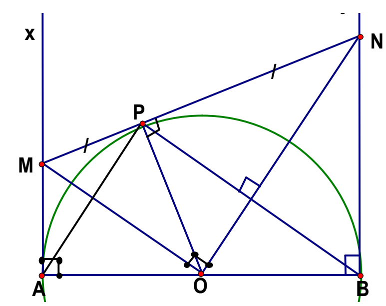
1.*(HD)* OI = OB — IB => (I) tiếp xúc (O)
OK = OC — KC => (K) tiếp xúc (O)
IK = IH + KH => (I) tiếp xúc (K)

2. Ta có : ∠BEH = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn)
=> ∠AEH = 90^0 (vì là hai góc kề bù). (1)
∠CFH = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn)
=> ∠AFH = 90^0 (vì là hai góc kề bù).(2)
∠BAC = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn hay ∠EAF = 90^0 (3)
Từ (1), (2), (3) => tứ giác AFHE là hình chữ nhật (vì có ba góc vuông).

3. Theo giả thiết AD⊥BC tại H nên ΔAHB vuông tại H có HE ⊥ AB (∠BEH = 90^0) => AH^2 = AE.AB (*)
Tam giác AHC vuông tại H có HF ⊥ AC (theo trên ∠CFH = 90^0) => AH^2 = AF.AC (**)
Từ (*) và (**) => AE. AB = AF. AC (= AH^2)
4. Theo chứng minh trên tứ giác AFHE là hình chữ nhật, gọi G là giao điểm của hai đường chéo AH và EF ta có GF = GH (tính chất đường chéo hình chữ nhật) => ΔGFH cân tại G => $\angle F_1 = \angle H_1$.
ΔKFH cân tại K (vì có KF và KH cùng là bán kính) => $\angle F_2 = \angle H_2$.
=> $\angle F_1 + \angle F_2 = \angle H_1 + \angle H_2$ mà $\angle H_1 + \angle H_2$ = ∠AHC = 90^0 => $\angle F_1 + \angle F_2$ = ∠KFE = 90^0 => KF ⊥EF .
Chứng minh tương tự ta cũng có IE ⊥ EF. Vậy EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (I) và (K).
e) Theo chứng minh trên tứ giác AFHE là hình chữ nhật => EF = AH ≤ OA (OA là bán kính đường tròn (O) có độ dài không đổi) nên EF = OA <=> AH = OA <=> H trùng với O.
Vậy khi H trùng với O túc là dây AD vuông góc với BC tại O thì EF có độ dài lớn nhất.

Bài 40 Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By. Trên Ax lấy điểm M rồi kẻ tiếp tuyến MP cắt By tại N.

1. Chứng minh tam giác MON đồng dạng với tam giác APB.
2. Chứng minh AM. BN = R^2.
3. Tính tỉ số $\frac{S_{MON}}{S_{APB}}$ khi AM = $\frac{R}{2}$.
4. Tính thể tích của hình do nửa hình tròn APB quay quanh cạnh AB sinh ra.



Lời giải:

1. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: OM là tia phân giác của góc AOP ; ON là tia phân giác của góc BOP, mà
∠AOP và ∠BOP là hai góc kề bù => ∠MON = 90^0. hay tam giác MON vuông tại O.
∠APB = 90^0((nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay tam giác APB vuông tại P.
Theo tính chất tiếp tuyến ta có NB ⊥ OB => ∠OBN = 90^0; NP ⊥ OP => ∠OPN = 90^0
=>∠OBN+∠OPN =180^0 mà ∠OBN và ∠OPN là hai góc đối => tứ giác OBNP nội tiếp =>∠OBP = ∠PNO
Xét hai tam giác vuông APB và MON có ∠APB = ∠ MON = 90^0; ∠OBP = ∠PNO => ΔAPB ~ Δ MON

2. Theo trên ΔMON vuông tại O có OP ⊥ MN (OP là tiếp tuyến).
Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có OP^2 = PM. PM
Mà OP = R; AM = PM; BN = NP (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) => AM. BN = R^2

3. Theo trên OP^2 = PM. PM hay PM. PM = R^2 mà PM = AM = $\frac{R}{2}$ => PM = $\frac{R}{2}$ => PN = R^2: $\frac{R}{2}$ = 2R

=> MN = MP + NP = $\frac{R}{2}$ + 2R = $\frac{5R}{2}$ Theo trên ΔAPB ~ Δ MON => $\frac{MN}{AB}$ = $\frac{5R}{2}$: 2R = $\frac{5}{4}$ = k (k là tỉ số đồng dạng).Vì tỉ số diện tich giữa hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng nên ta có:

$$\frac{S_{MON}}{S_{APB}} = k^2 \Rightarrow \frac{S_{MON}}{S_{APB}} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

Bài 41 Cho tam giác đều ABC , O là trung điển của BC. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm D, E sao cho ∠ DOE = 60^0 .

1)Chứng minh tích BD. CE không đổi.
2)Chứng minh hai tam giác BOD; OED đồng dạng. Từ đó suy ra tia DO là tia phân giác của góc BDE
3)Vẽ đường tròn tâm O tiếp xúc với AB. Chứng minh rằng đường tròn này luôn tiếp xúc với DE.

Lời giải:

1. Tam giác ABC đều => ∠ABC = ∠ ACB = 60^0 (1);

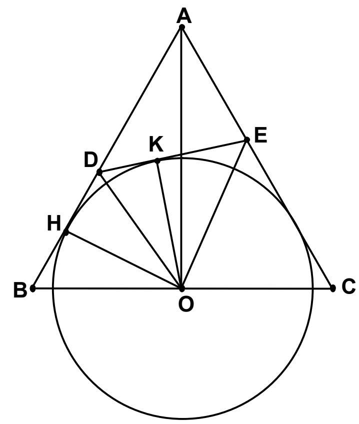
$\angle$ DOE = 60^0 (gt) =>$\angle$DOB + $\angle$EOC = 120^0 (2).

ΔDBO có $\angle$DOB = 60^0 => $\angle$BDO + $\angle$BOD = 120^0 (3) .

Từ (2) và (3) => $\angle$BDO = $\angle$ COE (4)

Từ (2) và (4) => ΔBOD ~ ΔCEO => $\frac{BD}{CO} = \frac{BO}{CE}$ => BD.CE = BO.CO

mà OB = OC = R không đổi => BD.CE = R^2 không đổi.



2. Theo trên ΔBOD ~ ΔCEO => $\frac{BD}{CO} = \frac{OD}{OE}$ mà CO = BO => $\frac{BD}{BO} = \frac{OD}{OE} \Rightarrow \frac{BD}{OD} = \frac{BO}{OE}$ (5)

Lại có $\angle$DBO = $\angle$DOE = 60^0 (6).

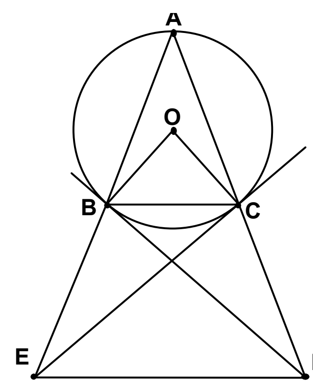
Từ (5) và (6) => ΔDBO ~ ΔDOE => $\angle$BDO = $\angle$ODE => DO là tia phân giác $\angle$ BDE.

3. Theo trên DO là tia phân giác $\angle$ BDE => O cách đều DB và DE => O là tâm đường tròn tiếp xúc với DB và DE. Vậy đường tròn tâm O tiếp xúc với AB luôn tiếp xúc với DE

<u>Bài 42</u> Cho tam giác ABC cân tại A. có cạnh đáy nhỏ hơn cạnh bên, nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại B và C lần lượt cắt AC, AB ở D và E. Chứng minh :

1. BD^2 = AD.CD.
2. Tứ giác BCDE nội tiếp .
3. BC song song với DE.

<u>Lời giải:</u>



1. Xét hai tam giác BCD và ABD ta có $\angle$CBD = $\angle$BAD (Vì là góc nội tiếp và góc giữa tiếp tuyến với một dây cùng chắn một cung), lại có $\angle$D chung => ΔBCD ~ ΔABD => $\frac{BD}{AD} = \frac{CD}{BD}$ => BD^2 = AD.CD.

2. Theo giả thiết tam giác ABC cân tại A => $\angle$ABC = $\angle$ACB => $\angle$EBC = $\angle$DCB mà $\angle$CBD = $\angle$BCD (góc giữa tiếp tuyến với một dây cùng chắn một cung) => $\angle$EBD = $\angle$DCE => B và C nhìn DE dưới cùng một góc do đó B và C cùng nằm trên cung tròn dựng trên DE => Tứ giác BCDE nội tiếp

3. Tứ giác BCDE nội tiếp => $\angle$BCE = $\angle$BDE (nội tiếp cùng chắn cung BE) mà $\angle$BCE = $\angle$CBD (theo trên) => $\angle$CBD = $\angle$BDE mà đây là hai góc so le trong nên suy ra BC // DE.

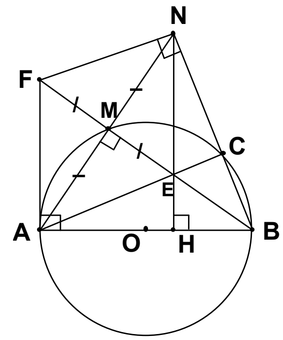
<u>Bài 43</u> Cho đường tròn (O) đường kính AB, điểm M thuộc đường tròn . Vẽ điểm N đối xứng với A qua M, BN cắt (O) tại C. Gọi E là giao điểm của AC và BM.

1. Chứng minh tứ giác MNCE nội tiếp .
2. Chứng minh NE $\perp$ AB.
3. Gọi F là điểm đối xứng với E qua M. Chứng minh FA là tiếp tuyến của (O).
4. Chứng minh FN là tiếp tuyến của đường tròn (B; BA).

<u>Lời giải:</u> **1**. ***(HS tự làm)***

2. (HD) Dễ thấy E là trực tâm của tam giác NAB => NE $\perp$ AB.

3.Theo giả thiết A và N đối xứng nhau qua M nên M là trung điểm của AN; F và E xứng nhau qua M nên M là trung điểm của EF => AENF là hình bình hành => FA // NE mà NE $\perp$ AB



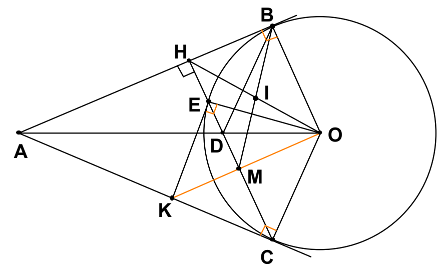
=> FA ⊥ AB tại A => FA là tiếp tuyến của (O) tại A.

4. Theo trên tứ giác AENF là hình bình hành => FN // AE hay FN // AC mà AC ⊥ BN => FN ⊥ BN tại N

ΔBAN có BM là đường cao đồng thời là đường trung tuyến (do M là trung điểm của AN) nên ΔBAN cân tại B => BA = BN => BN là bán kính của đường tròn (B; BA) => FN là tiếp tuyến tại N của (B; BA).

<u>Bài 44</u> AB và AC là hai tiếp tuyến của đường tròn tâm O bán kính R (B, C là tiếp điểm). Vẽ CH vuông góc AB tại H, cắt (O) tại E và cắt OA tại D.

1. Chứng minh CO = CD.
2. Chứng minh tứ giác OBCD là hình thoi.
3. Gọi M là trung điểm của CE, Bm cắt OH tại I. Chứng minh I là trung điểm của OH.
4. Tiếp tuyến tại E với (O) cắt AC tại K. Chứng minh ba điểm O, M, K thẳng hàng.



<u>Lời giải:</u>

1. Theo giả thiết AB và AC là hai tiếp tuyến của đường tròn tâm O => OA là tia phân giác của ∠BOC => ∠BOA = ∠COA (1)

OB ⊥ AB (AB là tiếp tuyến); CH ⊥ AB (gt) => OB // CH => ∠BOA = ∠CDO (2)

Từ (1) và (2) => ΔCOD cân tại C => CO = CD.(3)

2. theo trên ta có CO = CD mà CO = BO (= R) => CD = BO (4) lại có OB // CH hay OB // CD (5)

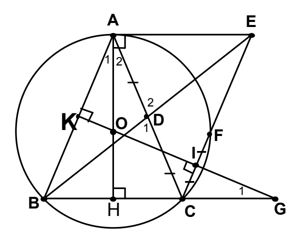
Từ (4) và (5) => BOCD là hình bình hành (6) . Từ (6) và (3) => BOCD là hình thoi.

3. M là trung điểm của CE => OM ⊥ CE (quan hệ đường kính và dây cung) => ∠OMH = 90^0. theo trên ta cũng có ∠OBH =90^0; ∠BHM =90^0 => tứ giác OBHM là hình chữ nhật => I là trung điểm của OH.

4. M là trung điểm của CE; KE và KC là hai tiếp tuyến => O, M, K thẳng hàng.

<u>Bài 45</u> Cho tam giác cân ABC (AB = AC) nội tiếp đường tròn (O). Gọi D là trung điểm của AC; tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A cắt tia BD tại E. Tia CE cắt (O) tại F.

1. Chứng minh BC // AE.
2. Chứng minh ABCE là hình bình hành.
3. Gọi I là trung điểm của CF và G là giao điểm của BC và OI. So sánh ∠BAC và ∠BGO.



<u>Lời giải:</u> 1. ***(HS tự làm)***

2).Xét hai tam giác ADE và CDB ta có ∠EAD = ∠BCD (vì so le trong)

AD = CD (gt); ∠ADE = ∠CDB (đối đỉnh) => ΔADE = ΔCDB => AE = CB (1)

Theo trên AE // CB (2) .Từ (1) và (2) => AECB là hình bình hành.

. 3) I là trung điểm của CF => OI ⊥ CF (quan hệ đường kính và dây cung). Theo trên AECB là hình bình hành => AB // EC => OI ⊥ AB tại K, => ΔBKG vuông tại K. Ta cung có ΔBHA vuông tại H

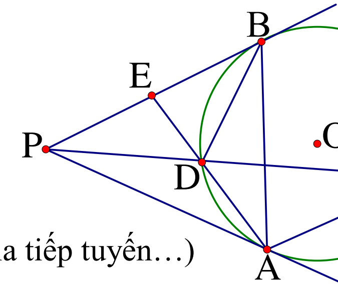
=> ∠BGK = ∠BAH (cung phụ với ∠ABH) mà ∠BAH = $\frac{1}{2}$ ∠BAC (do ΔABC cân nên AH là phân giác)

=> ∠BAC = 2∠BGO.

<u>Bài 46:</u> Cho đường tròn (O) và một điểm P ở ngoài đường tròn. Kẻ hai tiếp tuyến PA, PB (A; B là tiếp điểm). Từ A vẽ tia song song với PB cắt (O) tại C (C ≠ A). Đoạn PC cắt đường tròn tại điểm thứ hai D. Tia AD cắt PB tại E.

a. Chứng minh $\Delta EAB \sim \Delta EBD$.

b. Chứng minh AE là trung tuyến của ΔPAB.



HD: a) $\Delta EAB \sim \Delta EBD$ (g.g) vì: $\widehat{BEA}$ chung

$\widehat{EAB} = \widehat{EBD}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến…)

$\Rightarrow \dfrac{EB}{EA} = \dfrac{ED}{EB} \Rightarrow EB^2 = EA.ED$ (1)

* $\widehat{EPD} = \widehat{PCA}$ (s.l.t) ; $\widehat{EAP} = \widehat{PCA}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến…)

$\Rightarrow \widehat{EPD} = \widehat{EAP}$; $\widehat{PEA}$ chung $\Rightarrow \Delta EPD \sim \Delta EAP$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{EP}{EA} = \dfrac{ED}{EP} \Rightarrow EP^2 = EA.ED$ (2)Từ 1 & 2 $\Rightarrow EB^2 = EP^2 \Rightarrow EB = EP \Rightarrow$ AE là trung tuyến Δ PAB.

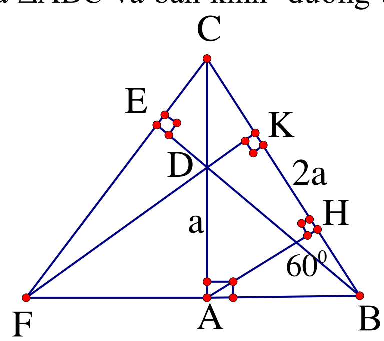
Bài 47: Cho ΔABC vuông ở A. Lấy trên cạnh AC một điểm D. Dựng CE vuông góc BD.

a. Chứng minh $\Delta ABD \sim \Delta ECD$.

b. Chứng minh tứ giác ABCE là tứ giác nội tiếp.

c. Chứng minh FD vuông góc BC, trong đó F là giao điểm của BA và CE.

d. Cho $\widehat{ABC} = 60^0$; BC = 2a; AD = a. Tính AC; đường cao AH của ΔABC và bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác ADEF.



HD: a) $\Delta ABD \sim \Delta ECD$ (g.g)

b) tứ giác ABCE là tứ giác nội tiếp (Quĩ tích cung chứa góc 90^0)

c) Chứng minh D là trực tâm Δ CBF.

d) $AC = BC.\sin\widehat{ABC} = 2a.\sin 60^0 = 2a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

$AB = BC.\cos\widehat{ABC} = 2a.\cos 60^0 = 2a.\dfrac{1}{2} = a$

$AH = AB.\sin\widehat{ABC} = a.\sin 60^0 = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; Δ FKB vuông tại K , có $\widehat{ABC} = 60^0 \Rightarrow \widehat{BFK} = 30^0$

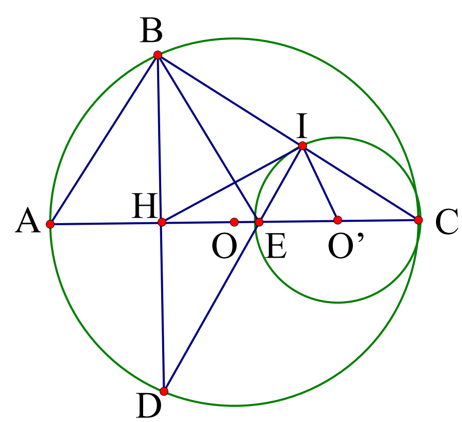
$\Rightarrow AD = FD.\sin\widehat{BFK} \Rightarrow AD = FD.\sin 30^0 \quad \Rightarrow a = FD.0,5 \Rightarrow FD = a : 0,5 = 2a.$

Bài 48: Cho ΔABC vuông ($\widehat{ABC} = 90^0$; BC > BA) nội tiếp trong đường tròn đường kính AC. Kẻ dây cung BD vuông góc AC. H là giao điểm AC và BD. Trên HC lấy điểm E sao cho E đối xứng với A qua H. Đường tròn đường kính EC cắt BC tại I ($I \neq C$).

a. Chứng minh $\dfrac{CI}{CB} = \dfrac{CE}{CA}$

b. Chứng minh D; E; I thẳng hàng.

c. Chứng minh HI là một tiếp tuyến của đường tròn đường kính EC.



HD; a) AB // EI (cùng $\perp$ BC)

$\Rightarrow \dfrac{CI}{CB} = \dfrac{CE}{CA}$ (đ/lí Ta-lét)

b) chứng minh ABED là hình thoi $\Rightarrow$ DE // AB mà EI //AB

$\Rightarrow$ D, E, I cùng nằm trên đường thẳng đi qua E // AB

$\Rightarrow$ D, E, I thẳng hàng.

c) $\widehat{EIO'} = \widehat{IEO'}$ (vì Δ EO'I cân ; O'I = O'E = $R_{(O')}$)

$\widehat{IEO'} = \widehat{HED}$ (đ/đ) ; ΔBID vuông ; IH là trung tuyến $\Rightarrow \Delta HID$ cân $\Rightarrow \widehat{HIE} = \widehat{HDI}$

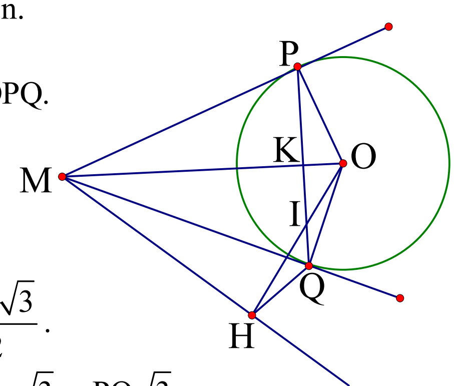
Mà $\widehat{HDI} + \widehat{HED} = 90^0 \Rightarrow$ đpcm.

Bài 49: Cho đường tròn (O; R) và một đường thẳng (d) cố định không cắt (O; R). Hạ OH $\perp$ (d) (H $\in$ d). M là một điểm thay đổi trên (d) (M $\neq$ H). Từ M kẻ 2 tiếp tuyến MP và MQ (P, Q là tiếp điểm) với (O; R). Dây cung PQ cắt OH ở I; cắt OM ở K.

a. Chứng minh 5 điểm O, Q, H, M, P cùng nằm trên 1 đường tròn.

b. Chứng minh IH.IO = IQ.IP

c. Giả sử $\widehat{PMQ} = 60^0$. Tính tỉ số diện tích 2 tam giác: ΔMPQ và ΔOPQ.



HD: a) 5 điểm O, Q, H, M, P cùng nằm trên 1 đường tròn

(Dựa vào quĩ tích cung chứa góc 90^0)

b) Δ OIP ~ Δ QIH (g.g) $\Rightarrow \dfrac{IO}{IP} = \dfrac{IQ}{IH} \Rightarrow$ IH.IO = IQ.IP

c) Δv MKQ có : $MK = KQ.tg\widehat{MQK} = KQ.tg60^0 = \dfrac{PQ}{2}\sqrt{3} = \dfrac{PQ\sqrt{3}}{2}$.

Δv OKQ có: $OK = KQ.tg\widehat{OQK} = KQ.tg30^0 = KQ.\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{PQ}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{PQ\sqrt{3}}{6}$

$$\Rightarrow \frac{S_{MPQ}}{S_{OPQ}} = \frac{PQ\sqrt{3}}{2} : \frac{PQ\sqrt{3}}{6} = 3$$

Bài 50: Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB=2R. Trên tia đối của tia AB lấy điểm E (E $\neq$ A). Từ E, A, B kẻ các tiếp tuyến với nửa đường tròn. Tiếp tuyến kẻ từ E cắt hai tiếp tuyến kẻ từ A và B theo thứ tự tại C và D.

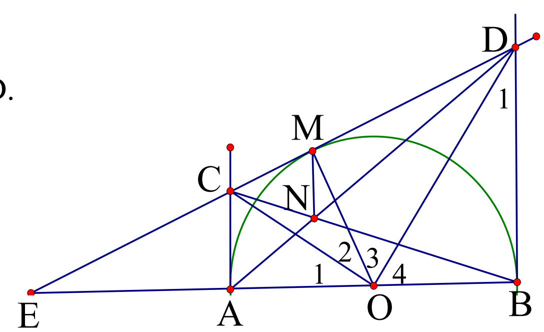
a. Gọi M là tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ E tới nửa đường tròn. Chứng minh tứ giác ACMO nội tiếp được trong một đường tròn.

b. Chứng minh ΔEAC ~ ΔEBD, từ đó suy ra $\dfrac{DM}{DE} = \dfrac{CM}{CE}$.

c. Gọi N là giao điểm của AD và BC. Chứng minh MN // BD.

d. Chứng minh: $EA^2 = EC.EM - EA.AO$.

e. Đặt $\widehat{AOC} = \alpha$. Tính theo R và α các đoạn AC và BD. Chứng tỏ rằng tích AC.BD chỉ phụ thuộc giá trị của R, không phụ thuộc vào α.



HD:a) ACMO nội tiếp (Dựa vào quĩ tích cung chứa góc 90^0)

b) AC // BD (cùng $\perp$ EB) $\Rightarrow \Delta$EAC ~ ΔEBD

$\Rightarrow \dfrac{CE}{DE} = \dfrac{AC}{BD}$ (1)mà AC = CM ; BD = MD (T/c hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \dfrac{CE}{DE} = \dfrac{CM}{DM}$ (2)$\Rightarrow \dfrac{DM}{DE} = \dfrac{CM}{CE}$

c) AC // BD (cmt) $\Rightarrow \Delta$NAC ~ ΔNBD$\Rightarrow \dfrac{NC}{NB} = \dfrac{AC}{BD}$(3) .Từ 1; 2; 3 $\Rightarrow \dfrac{NC}{NB} = \dfrac{CM}{DM} \Rightarrow$ MN // BD

d) $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$; $\widehat{O}_3 = \widehat{O}_4$ mà $\widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 + \widehat{O}_4 = 180^0 \Rightarrow \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 = 90^0$; $\widehat{O}_4 + \widehat{D}_1 = 90^0$ (…)

$\Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{O}_2 = \widehat{O}_1 = \alpha$. Vậy: $DB = \dfrac{OB}{tg\alpha} = \dfrac{R}{tg\alpha}$; Lại có: AC = OA.tgα = R.tgα $\Rightarrow$ AC.DB = R.tgα. $\dfrac{R}{tg\alpha}$

$\Rightarrow AC.DB = R^2$ (Đpcm)

Bài 51: Cho ΔABC có 3 góc nhọn. Gọi H là giao điểm của 3 đường cao AA_1; BB_1; CC_1.

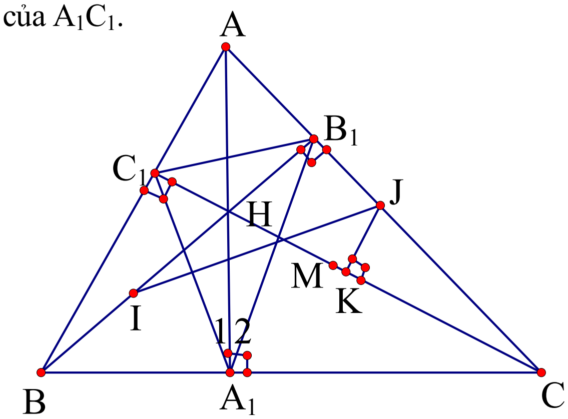
a. Chứng minh tứ giác HA_1BC_1 nội tiếp được trong đường tròn. Xác định tâm I của đường tròn ấy.

b. Chứng minh A_1A là phân giác của $\widehat{B_1A_1C_1}$.

c. Gọi J là trung điểm của AC. Chứng minh IJ là trung trực của A_1C_1.

d. Trên đoạn HC lấy 1 điểm M sao cho $\frac{MH}{MC} = \frac{1}{3}$.

So sánh diện tích của 2 tam giác: ΔHAC và ΔHJM.



HD: a) HA_1BC_1 nội tiếp (quĩ tích cung chứa góc 90^0)

Tâm I là trung điểm BH.

b) C/m: $\widehat{HA_1C_1} = \widehat{HBC_1}$; $\widehat{HA_1B_1} = \widehat{HCB_1}$;

$\widehat{HBC_1} = \widehat{HCB_1} \Rightarrow \widehat{HA_1C_1} = \widehat{HA_1B_1} \Rightarrow$ đpcm.

c) $IA_1 = IC_1 = R_{(I)}$; $JA = JA_1 = AC/2$ …

$\Rightarrow$ IJ là trung trực của A_1C_1.

d) $S_{HJM} = \frac{1}{2}HM.JK$; $S_{HAC} = \frac{1}{2}HC.AC_1$

$\Rightarrow S_{HAC} : S_{HJM} = \frac{HC.AC_1}{HM.JK}$ mà $\frac{MH}{MC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{HC}{HM} = \frac{HM+MC}{HM} = 1 + \frac{MC}{HM} = 1 + 3 = 4$; $\frac{AC_1}{JK} = 2$ (JK// AC_1

$\Rightarrow S_{HAC} : S_{HJM} = 8$

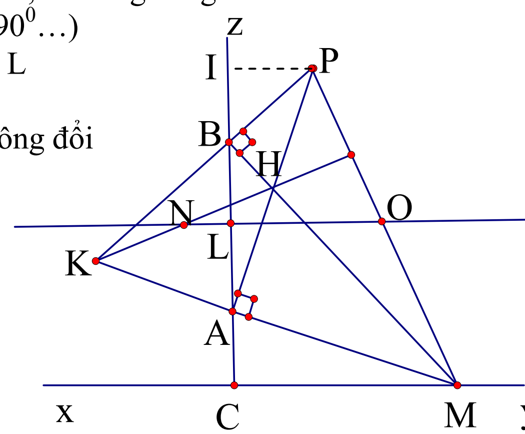
Bài 52: Cho điểm C cố định trên một đường thẳng xy. Dựng nửa đường thẳng Cz vuông góc với xy và lấy trên đó 2 điểm cố định A, B (A ở giữa C và B). M là một điểm di động trên xy. Đường vuông góc với AM tại A và với BM tại B cắt nhau tại P.

a. Chứng minh tứ giác MABP nội tiếp được và tâm O của đường tròn này nằm trên một đường thẳng cố định đi qua điểm giữa L của AB.

b. Kẻ PI $\perp$ Cz. Chứng minh I là một điểm cố định.

c. BM và AP cắt nhau ở H; BP và AM cắt nhau ở K. Chứng minh rằng KH $\perp$ PM.

d. Cho N là trung điểm của KH. Chứng minh các điểm N; L; O thẳng hàng.



HD: a) MABP nội tiếp đ/tròn đ/k MP.(quĩ tích cung chứa góc 90^0…)

OA = OB = $R_{(O)} \Rightarrow$ O thuộc đường trung trực AB đi qua L là trung điểm AB…

b) IP // CM ($\perp$ Cz) $\Rightarrow$ MPIC là hình thang. $\Rightarrow$ IL = LC không đổi vì A,B,C cố định. $\Rightarrow$ I cố định.

c) PA $\perp$ KM ; PK $\perp$ MB $\Rightarrow$ H là trực tâm Δ PKM

$\Rightarrow$ KH $\perp$ PM

d) AHBK nội tiếp đ/tròn đ/k KH (quĩ tích cung chứa góc…)

$\Rightarrow$ N là tâm đ/tròn ngoại tiếp … $\Rightarrow$ NE = NA = $R_{(N)}$

$\Rightarrow$ N thuộc đường trung trực AB

$\Rightarrow$ O,L,N thẳng hàng.

Bài 53: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và K là điểm chính giữa của cung AB. Trên cung AB lấy một điểm M (khác K; B). Trên tia AM lấy điểm N sao cho AN = BM. Kẻ dây BP song song với KM. Gọi Q là giao điểm của các đường thẳng AP, BM.

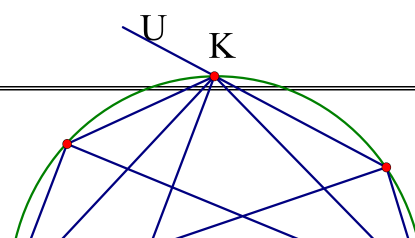
a. So sánh hai tam giác: ΔAKN và ΔBKM.

b. Chứng minh: ΔKMN vuông cân.

c. Tứ giác ANKP là hình gì? Vì sao?

HD: a) Δ AKN = Δ BKM(c.g.c)

b) HS tự c/m. Δ KMN vuông cân.



c) Δ KMN vuông $\Rightarrow$ KN $\perp$ KM mà KM // BP $\Rightarrow$ KN $\perp$ BP

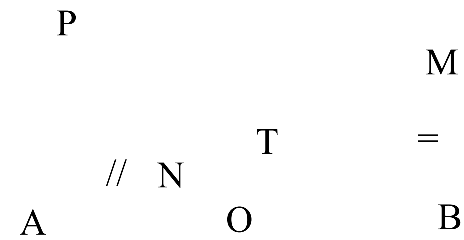
$\widehat{APB} = 90^0$ (góc nội tiếp…) $\Rightarrow$ AP $\perp$ BP

$\Rightarrow$ KN // AP ($\perp$ BP)

KM // BP $\Rightarrow$ $\widehat{KMN} = \widehat{PAT} = 45^0$

Mà $\widehat{PAM} = \widehat{PKU} = \dfrac{\widehat{PKM}}{2} = 45^0$

$\widehat{PKN} = 45^0$; $\widehat{KNM} = 45^0 \Rightarrow$ PK // AN . Vậy ANPK là hình bình hành.



Bài 54: Cho đường tròn tâm O, bán kính R, có hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. M là một điểm tuỳ ý thuộc cung nhỏ AC. Nối MB, cắt CD ở N.

a. Chứng minh: tia MD là phân giác của góc AMB.

b. Chứng minh:ΔBOM ~ ΔBNA. Chứng minh: BM.BN không đổi.

c. Chứng minh: tứ giác ONMA nội tiếp. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ONMA, I di động như thế nào?

HD: a) $\widehat{AMD} = \widehat{DMB} = 45^0$ (chắn cung ¼ đ/tròn)

$\Rightarrow$ MD là tia phân giác $\widehat{AMB}$

b) Δ OMB cân vì OM = OB = $R_{(O)}$

Δ NAB cân có NO vừa là đ/cao vừa là đường trung tuyến.

$\Rightarrow \Delta$ OMB ~ Δ NAB

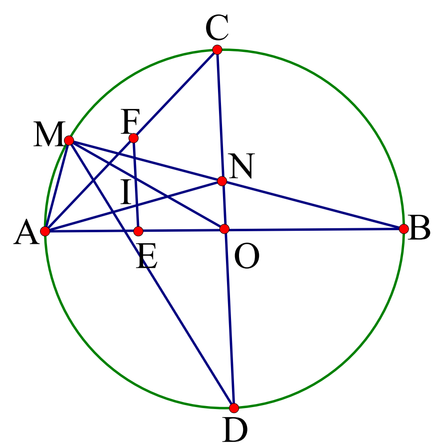
$\Rightarrow \dfrac{BM}{BA} = \dfrac{BO}{BN} \Rightarrow$ BM.BN = BO.BA = $2R^2$ không đổi.

c) ONMA nội tiếp đ/tròn đ/k AN. Gọi I là tâm đ/tròn ngoại tiếp

$\Rightarrow$ I cách đều A và O cố định $\Rightarrow$ I thuộc đường trung trực OA

Gọi E và F là trung điểm của AO; AC

Vì M chạy trên cung nhỏ AC nên tập hợp I là đoạn EF



Bài 55: Cho ΔABC cân (AB = AC) nội tiếp một đường tròn (O). Gọi D là trung điểm của AC; tia BD cắt tiếp tuyến tại A với đường tròn (O) tại điểm E; EC cắt (O) tại F.

a. Chứng minh: BC song song với tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A.

b. Tứ giác ABCE là hình gì? Tại sao?

c. Gọi I là trung điểm của CF và G là giao điểm của các tia BC; OI. So sánh $\widehat{BGO}$ với $\widehat{BAC}$.

d. Cho biết DF // BC. Tính cos $\widehat{ABC}$.

HD:a) Gọi H là trung điểm BC $\Rightarrow$ AH $\perp$ BC (Δ ABC cân tại A)

lập luận chỉ ra AH $\perp$ AE $\Rightarrow$ BC // AE. (1)

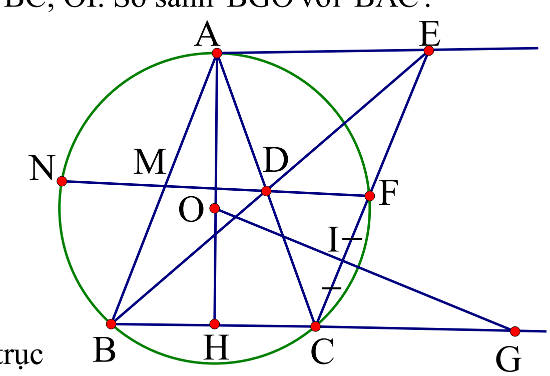
b) Δ ADE = Δ CDB (g.c.g) $\Rightarrow$ AE = BC (2)

Từ 1 và 2 $\Rightarrow$ ABCE là hình bình hành.

c) Theo c.m.t $\Rightarrow$ AB // CF $\Rightarrow$ GO $\perp$ AB.

$\Rightarrow \widehat{BGO} = 90^0 - \widehat{ABC} = \widehat{BAH} = \dfrac{1}{2}\widehat{BAC}$

d) Tia FD cắt AB taijM, cắt (O) tại N.; DF // BC và AH là trục đối xứng cuarBC và đ/tròn (O) nên F, D thứ tự đối xứng với N, M qua AH.

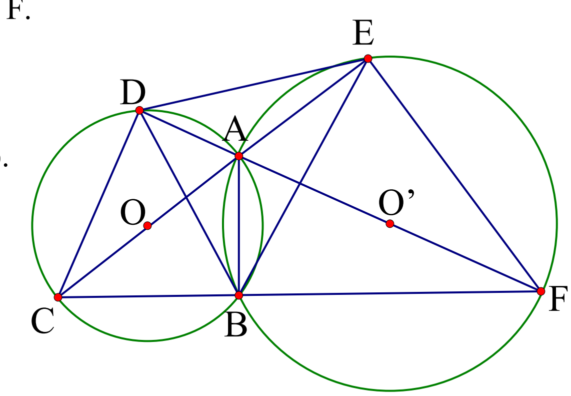


$\Rightarrow$ FD = MN = MD = $\dfrac{1}{2}$BC = $\dfrac{1}{2}$ND = BH ; Δ NDA ~ Δ CDF (g.g) $\Rightarrow$ DF.DN = DA.DC

$\Rightarrow 2BH^2 = \frac{1}{4}AC^2 \Rightarrow BH = \frac{\sqrt{2}}{4}AC \Rightarrow \cos\widehat{ABC} = \frac{BH}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Bài 56: Cho 2 đường tròn (O) và (O’) cắt nhau tại hai điểm A và B. Các đường thẳng AO; AO’ cắt đường tròn (O) lần lượt tại các điểm C; D và cắt (O’) lần lượt tại E; F.

a. Chứng minh: C; B; F thẳng hàng.
b. Chứng minh: Tứ giác CDEF nội tiếp được.
c. Chứng minh: A là tâm đường tròn nội tiếp ΔBDE.
d. Tìm điều kiện để DE là tiếp tuyến chung của (O) và (O’).



HD: a) $\widehat{CBA} = 90^0 = \widehat{FBA}$ (góc nội tiếp chắn nửa đ/tròn)

$\Rightarrow \widehat{CBA} + \widehat{FBA} = 180^0 \Rightarrow$ C, B, F thẳng hàng.

b) $\widehat{CDF} = 90^0 = \widehat{CEF} \Rightarrow$ CDEF nội tiếp (quĩ tích …)

c) CDEF nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ECB}$ (cùng chắn cung EF)

Xét (O) có: $\widehat{ADB} = \widehat{ECB}$ (cùng chắn cung AB)

$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ADB} \Rightarrow$ DA là tia phân giác $\widehat{BDE}$. Tương tự EA là tia phân giác $\widehat{DEB}$

Vậy A là tâm đường tròn nội tiếp ΔBDE..

d) ODEO’ nội tiếp. Thực vậy : $\widehat{DOA} = 2\widehat{DCA}$; $\widehat{EO'A} = 2\widehat{EFA}$ mà $\widehat{DCA} = \widehat{EFA}$ (góc nội tiếp chắn cung DE) $\Rightarrow \widehat{DOA} = \widehat{EO'A}$; mặt khác: $\widehat{DAO} = \widehat{EAO'}$ (đ/đ) $\Rightarrow \widehat{ODO'} = \widehat{O'EO} \Rightarrow$ ODEO’ nội tiếp.

Nếu DE tiếp xúc với (O) và (O’) thì ODEO’ là hình chữ nhật $\Rightarrow$ AO = AO’ = AB.

Đảo lại : AO = AO’ = AB cũng kết luận được DE là tiếp tuyến chung của (O) và (O’)

Kết luận : Điều kiện để DE là tiếp tuyến chung của (O) và (O’) là : AO = AO’ = AB.

Bài 57: Cho đường tròn (O; R) có 2 đường kính cố định AB $\perp$ CD.

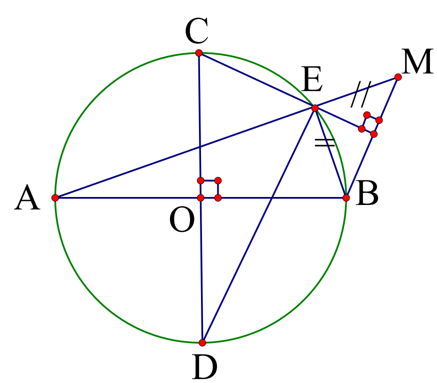
a) Chứng minh: ACBD là hình vuông.

b). Lấy điểm E di chuyển trên cung nhỏ BC (E $\neq$ B; E $\neq$ C). Trên tia đối của tia EA lấy đoạn EM = EB. Chứng tỏ: ED là tia phân giác của $\widehat{AEB}$ và ED // MB.

c). Suy ra CE là đường trung trực của BM và M di chuyển trên đường tròn mà ta phải xác định tâm và bán kính theo R.

HD: a) AB $\perp$ CD. ; OA = OB = OC = OD = $R_{(O)}$

$\Rightarrow$ ACBD là hình vuông.



b) $\widehat{AED} = \frac{1}{2}\widehat{AOD} = 45^0$; $\widehat{DEB} = \frac{1}{2}\widehat{DOB} = 45^0$

$\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{DEB} \Rightarrow$ ED là tia phân giác của $\widehat{AEB}$.

$\widehat{AED} = 45^0$; $\widehat{EMB} = 45^0$ (Δ EMB vuông cân tại E)

$\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{EMB}$ (2 góc đồng vị) $\Rightarrow$ ED // MB.

c) Δ EMB vuông cân tại E và CE $\perp$ DE ; ED // BM

$\Rightarrow$ CE $\perp$ BM $\Rightarrow$ CE là đường trung trực BM.

d) Vì CE là đường trung trực BM nên CM = CB = R$\sqrt{2}$

Vậy M chạy trên đường tròn (C ; R’ = R$\sqrt{2}$)

Bài 58: Cho ΔABC đều, đường cao AH. Qua A vẽ một đường thẳng về phía ngoài của tam giác, tạo với cạnh AC một góc 40^0. Đường thẳng này cắt cạnh BC kéo dài ở D. Đường tròn tâm O đường kính CD cắt AD ở E. Đường thẳng vuông góc với CD tại O cắt AD ở M.

a. Chứng minh: AHCE nội tiếp được. Xác định tâm I của đường tròn đó.

b. Chứng minh: CA = CM.

c. Đường thẳng HE cắt đường tròn tâm O ở K, đường thẳng HI cắt đường tròn tâm I ở N và cắt đường thẳng DK ở P. Chứng minh: Tứ giác NPKE nội tiếp.

Bài 59: BC là một dây cung của đường tròn (O; R) ($BC \neq 2R$). Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho O luôn nằm trong ΔABC. Các đường cao AD; BE; CF đồng quy tại H.

a. Chứng minh:$\Delta AEF \sim \Delta ABC$.

b. Gọi A' là trung điểm BC. Chứng minh: AH = 2.A'O.

c. Gọi A_1 là trung điểm EF. Chứng minh: $R.AA_1 = AA'.OA'$.

d. Chứng minh: $R.(EF + FD + DE) = 2.S_{ABC}$.

Suy ra vị trí điểm A để tổng (EF + FD + DE) đạt GTLN.

Bài 60: Cho đường tròn tâm (O; R) có AB là đường kính cố định còn CD là đường kính thay đổi. Gọi (Δ) là tiếp tuyến với đường tròn tại B và AD, AC lần lượt cắt (Δ) tại Q và P.

a. Chứng minh: Tứ giác CPQD nội tiếp được.

b. Chứng minh: Trung tuyến AI của ΔAQP vuông góc với DC.

c. Tìm tập hợp các tâm E của đường tròn ngoại tiếp ΔCPD.